



Le problème de frontières libres en magnétodynamique des liquides avec champs magnétiques alternatifs : aspects fondamentaux et applications

Jacqueline Etay

► To cite this version:

Jacqueline Etay. Le problème de frontières libres en magnétodynamique des liquides avec champs magnétiques alternatifs : aspects fondamentaux et applications. Electromagnétisme. UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE; INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1988. Français. NNT : . tel-01340204

HAL Id: tel-01340204

<https://hal.science/tel-01340204>

Submitted on 30 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE, TECHNIQUE
ET MÉDICALE DE GRENOBLE

ET

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR D'ÉTAT ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacqueline ETAY

S U J E T

**LE PROBLÈME DE FRONTIÈRES LIBRES
EN MAGNÉTODYNAMIQUE DES LIQUIDES
AVEC CHAMPS MAGNÉTIQUES ALTERNATIFS :
ASPECTS FONDAMENTAUX ET APPLICATIONS.**

Soutenue le 7 Janvier 1988 devant la Commission d'Examen

M. BLOCH

Président

M. ASAI

M. GARNIER

M. MOFFATT

M. MOREAU

Examineurs

GRENOBLE



J.A. Shercliff

à J.A. Shercliff
(1927-1983)

REMERCIEMENTS

Comme cela avait été précédemment le cas pour mon mémoire de D.E.A. et ma thèse de Docteur-Ingénieur, de nombreuses personnes ont contribué à rendre possible la présentation de cette thèse.

Je me trouve néanmoins aujourd'hui dans une situation quelque peu délicate car, il me paraît impossible de citer dans ces lignes tous ceux et toutes celles qui ont ,directement ou non ,participé à cette préparation.

La construction de cette thèse s'est en effet étendue sur plusieurs années depuis 1979 en liaison avec les laboratoires de l'Institut de Mécanique de Grenoble , du Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics de L'Université de Cambridge et du Laboratoire d'Electricité et de Mécanique Théorique et Appliquée de Nancy, avec le soutien du Groupement Scientifique "Matériaux Amorphes : Procédés et Caractérisations" et d'U.S.I.N.O.R.

Que toutes ces personnes que je ne peux mentionner ici faute de place soient assurées que je leur suis très reconnaissante de l'enrichissement considérable que m'ont valu leurs rencontres et leurs conseils.

Depuis 1979 , M.Marcel GARNIER , Directeur de Recherche au CNRS, a régulièrement dirigé mes travaux au sein du Groupement d'Intérêt Scientifique puis du laboratoire MADYLAM , et a toujours su , en dépit des nombreuses charges que lui vaut son grand dynamisme , se montrer disponible et attentif à la progression parfois difficile de mes travaux . Je l'en remercie vivement.

De même , je voudrais exprimer tout particulièrement ma gratitude à M. le Professeur MOFFATT qui m'a accueilli une année à Cambridge, en 1983 , qui lors de son séjour à Grenoble , m'a proposé une collaboration sur le problème de la déflexion de lame , objet du paragraphe II.4 de cette thèse , et qui accepte , aujourd'hui ,d'être rapporteur de mon travail.

Enfin , je souhaiterais montrer ma très grande reconnaissance à M.le Professeur MOREAU qui , d'une part , m'accepta avec sympathie au G.I.S.MADYLAM , dont il était alors directeur , pour mon D.E.A. et me fait l'honneur de siéger dans ce jury.

Merci aussi à MM. les Professeurs BLOCH et ASAI qui ont respectivement accepté d'être président et rapporteur du présent jury.

Au sein de l'équipe constituant MADYLAM ,également , de nombreuses personnes ont contribué à l'élaboration de cette thèse par leur travail personnel , leur attention constante et , fréquemment , par leur interventions ; je voudrais les remercier dans ces mêmes lignes.

Pascale JULLIARD , dont j'ai apprécié la minutie et l'autonomie dans le travail alliées à sa grande disponibilité et sa réconfortante égalité d'humeur , mérite toute ma reconnaissance et mes sincères remerciements. Le paragraphe II.5 de cette thèse lui doit beaucoup.

Non moins autonome, François GARNIER a su stimuler ma recherche par son savoir-faire technique , ses remarquables facultés d'adaptation, sa rapidité d'exécution et sa soif d'apprendre. Il a largement contribué à la mise en oeuvre des expériences exposées au paragraphe II.3. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Merci également à Annie GAGNOUD pour les échanges fructueux dont l'article faisant l'objet du paragraphe III.1. est un des aboutissements et à Shudji TAKEUCHI qui a eu l'amabilité de vérifier l'intégralité des calculs analytiques présentés au paragraphe III.3.

Au sein d'autres laboratoires , plusieurs personnes ont amicalement contribué à la formation de ma culture scientifique; je tiens à les remercier dans ces lignes et plus particulièrement :

A Cambridge , Jonathan MESTEL dont l'aide ma fut si précieuse lors de mon séjour au DAMTP et qui a assuré la rédaction de l'article ,objet du paragraphe II.4 . J'ai été extrêmement sensible à son amabilité et tiens à lui exprimer ma reconnaissance ici même.

A Nancy , Jean-Pierre BRANCHER et Olivier SERO-GUILLAUME m'ont initiée aux principes variationnels et ont collaboré à l'achèvement de l'article se trouvant au paragraphe II.1.2. Leur chaleureuse sympathie ne fait qu'accroître ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également aux équipes techniques qui ont su , tout au long de ces travaux , m'apporter leur concours efficace et désintéressé : MM. BOLCATO, BON, DO, SALLAT; M. BRAULT pour les indispensables prises de vue photographiques développées avec soin et précision par Mmes JULIEN et SEPEDA.

Je dois enfin , comme à l'accoutumée, associer à cette thèse Pascale ESTEOULE qui en a assuré la frappe et l'équipe Reprographie qui a eu la tâche de réaliser les tirages.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
NOTATION.....	5

CHAPITRE I

HYDRODYNAMIQUE EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE ALTERNATIF

I.1 - EFFET D'UN CHAMP MAGNETIQUE ALTERNATIF SUR UN MILIEU ELECTROCONDUCTEUR .	
I.1.1 - Loi de l'induction-épaisseur de peau	7
I.1.2 - Calcul . du champ magnétique	9
. des courants induits - effet Joule	10
. de la force électromagnétique	11
I.2 - ECOULEMENT D'UN LIQUIDE ELECTROCONDUCTEUR EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE ALTERNATIF .	
I.2.1 - Expression du saut de pression à travers les couches limite.....	14
I.2.2 -Ecoulement de métaux liquides	16
I.2.3 - Ecoulement adjacent à une paroi	18
I.2.4 - Ecoulement adjacent à une surface libre	19
I.2.4 - Ecoulement : conclusion.....	20
I.3 - STABILISATION D'INTERFACE PAR CHAMP MAGNETIQUE .	
I.3.1 - Stabilisation et champ magnétique	22
I.3.2 - Effet d'un champ uniforme alternatif	23
I.3.3 - Uniformité du champ magnétique	24
I.3.4 - Guidage électromagnétique	27

CHAPITRE II

JETS

II.1 - PROCEDES METALLURGIQUES .

II.1.1 - Suppression des parois en coulée continue	29
II.1.2 - Application à la coulée directe de bandes minces	30
II.1.3 - Formage électromagnétique de jets	31

II.2 - CALCULS .

II.2.1 - Hypothèses de calcul	32
II.2.2 - Formage d'une lame métallique liquide - Calculs et expériences	37
(article publié au J.M.T.A.)	

II.3 - EXPERIENCES DE FORMAGE ET COALESCENCE .

II.3.1 - Effet de la tension superficielle sur l'hydrodynamique des jets libres	51
II.3.2 - Description de la géométrie de l'inducteur	52
II.3.3 - Optimisation de l'inducteur	55
II.3.4 - Expériences sur mercure et métaux chauds	61

II.4 - DEFLECTION ELECTROMAGNETIQUE D'UNE LAME LIQUIDE 67 (article soumis au J.F.M.)

II.5 - IMPACT D'UNE LAME LIQUIDE SUR UN SUBSTRAT EN MOUVEMENT .

II.5.1 - Motivations et description de l'installation expérimentale	99
II.5.2 - Description de l'impact	100
II.5.2.1 - Effet de la largeur finie de la lame	101
II.5.2.2 - Effet de la viscosité	101
II.5.2.3 - Effet de la rotation du substrat	102
II.5.2.4 - Effet de l'air	103
II.5.3 - Résultats expérimentaux	104
II.5.4 - Conclusions	109

CHAPITRE III

LEVITATIONS

III.1 - LE PROBLEME DE FRONTIERE LIBRE EN LEVITATION ELECTROMAGNETIQUE	113
(article publié au J.M.T.A.)	

III.2. - CALCUL DE LA SURFACE LIBRE D'UN MENISQUE AXISYMETRIQUE DE METAL LIQUIDE CENTRE SUR UN ANNEAU INDUCTEUR.

III.2.1. - Zone fondue	137
III.2.2. - Méthode de calcul	138
III.2.3. - Résultats et conclusions	139

III.3 - LA LEVITATION ELECTROMAGNETIQUE DANS LE PROCEDE DE COULEE CONTINUE HORIZONTALE .

III.3.1 - Introduction	143
III.3.2 - Cas d'une feuille de métal fondu	145
III.3.2.1 - Equilibre de la feuille	145
III.3.2.2 - Perturbation de la feuille mode antisymétrique	146
III.3.2.3 - Perturbation de la feuille mode symétrique	153
III.3.2.4 - Résultats	154
III.3.3 - Cas d'un barreau de métal fondu	158
III.3.3.1 - Etat d'équilibre	159
III.3.3.2 - Perturbation	160
III.3.3.3 - Résultats.....	165
III.3.4 - Conclusion	166

CONCLUSION	169
------------------	-----

BIBLIOGRAPHIE	173
---------------------	-----

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Il peut paraître aujourd'hui paradoxal qu'un chercheur s'intéresse à l'industrie des métaux et plus particulièrement à l'industrie sidérurgique ; à l'heure des technopoles et autres "créneaux porteurs" que peut apporter la recherche scientifique à cette sidérurgie qui nous est présentée, de restructurations en publications de déficit, comme une activité moribonde au charme suranné d'une prospérité renvoyant au XIX^e siècle ?

Pourtant, toute l'histoire passée de l'industrie du fer ne fut qu'une succession de révolutions technologiques, de mutations dues soit à l'adoption de procédés conduisant à un produit sensiblement différent, soit au perfectionnement de techniques antérieures débouchant sur un gain de qualité. Toutes ces transformations se sont accompagnées d'une augmentation de la production et de la productivité et ont entraîné une redistribution géographique mondiale des centres d'activité.

La production mondiale d'acier n'a cessé de croître, hormis quelques fléchissements, jusqu'en 1975. Elle a atteint son extremum absolu en 1973, avec 750 Mt. Depuis cette date, la production stagne, orientée à la baisse : 715 Mt en 1978, 660 Mt en 1983 et 720 en 1987 (O.C.D.E). Cette rupture a été plus particulièrement ressentie par les pays industrialisés : l'émergence des sidérurgies d'Europe de l'Est et surtout de celles des pays en voie de développement, traditionnellement importateurs, passée de 7 % en 1974, à 15 % du marché mondial en 1985, a aggravé le poids de la surcapacité des usines géantes achevées entre 1975 et 1980 et dont la construction avait été décidée dans l'euphorie des années 1970 (DE).

Quant à la stagnation de la demande, qui a précipité la crise, elle est autant due à des facteurs techniques qu'aux bouleversements économiques qu'ont connu les pays industrialisés. En effet, bien que l'utilisation ne s'explique pas par cette concurrence, mais par "un phénomène général de dématérialisation progressive des produits par l'incorporation de procédés électroniques et informatiques, par de nouvelles conceptions qui ne sont que des manifestations diverses du progrès technique" (45). Notons que le matériau acier participe également à ce processus et qu'une part importante de la baisse consommation spécifique s'explique par ses propres progrès (45).

En ces termes, quel peut être l'avenir de la sidérurgie française ?

Il est illusoire de vouloir concurrencer les sidérurgies en forte croissance des pays en voie de développement tournées vers la production de masse d'aciers courants. Leur contexte social, marqué par une main d'oeuvre flexible et bon marché et leurs structures de production faites d'usines géantes intégrées leur assurent de bons prix de revient. De plus, le marché européen constitue un débouché indispensable pour le décollage économique de ces pays et la réduction de leur endettement colossal.

Or, les sidérurgistes français, contrairement à leurs homologues japonais (par exemple Nippon Steel) n'ont pas élargi leur éventail de production aux métaux non ferreux (aluminium) ou aux produits chimiques (résines, peintures), mais l'acier devenu "un produit comme les autres" (Barre (3)) ne peut plus être subventionné. Ainsi, toute innovation technologique conduisant :

- à un gain, même faible, sur le coût de la tonne d'acier produite ou
- à une augmentation de la valeur ajoutée du produit élaboré peut être économiquement intéressante.

L'importance de l'enjeu a, immanquablement suscité l'intérêt des universitaires, en collaboration ou en marge de l'I.R.S.I.D., Institut de Recherche de la Sidérurgie Française, dont l'objectif est de "contribuer à la résolution, dans les usines, des problèmes techniques qui s'y posent à court, moyen et long terme" (39). Parmi ces équipes universitaires, le laboratoire MADYLAM (Magnétodynamique des liquides - Applications à la Métallurgie) a pour but principal d'étudier l'utilisation des champs magnétiques comme moyen de :

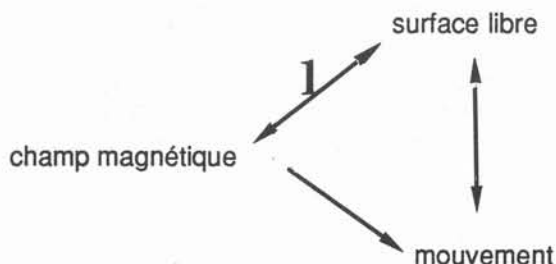
- améliorer les procédés existants,
- permettre l'élaboration de produits de très haute qualité capable de répondre aux exigences des industries électronique, aéronautique ou de la décoration.

Ce projet a des échos mondiaux comme en témoignent des congrès internationaux tels que le symposium IUTAM, qui s'est tenu en 1982 à Cambridge (U.K.) intitulé "Applications Métallurgiques de la Magnétohydrodynamique" ou bien le futur et proche (mai 1988) symposium IUTAM qui aura lieu à Riga (URSS) sur la "Magnétodynamique des métaux liquides" ou bien encore le congrès organisé conjointement par l'Institut Japonais de Fer et de l'Acier (ISIJ) et la Société Française de Métallurgie, en 1990, à Tokyo (Japon) concernant les "Material electro-processing".

Les champs magnétiques, et plus particulièrement les champs magnétiques glissants ou alternatifs ont la faculté d'induire sans contact dans un matériau conducteur de l'électricité des effets thermiques ou mécaniques. L'utilisation de cette faculté en métallurgie est récente. Elle a commencé en 1960 avec les études de pompes capables de remonter des métaux aussi agressifs que l'acier ou l'aluminium. Aujourd'hui, les champs magnétiques alternatifs sont utilisés industriellement aussi bien dans les fours à induction (en creusets ou à canneaux) qu'en coulée continue verticale (procédé Magnétogyr). L'extension de ces techniques est fortement conditionnée par les progrès de l'électrotechnique (triode puis thyristors et aujourd'hui semi-conducteur) des générateurs de puissance capables de fournir des courants électriques d'intensité et de fréquence élevées. D'autres applications des champs magnétiques comme la coulée de tubes creux (17), ou le "robinet électromagnétique" (29) ont donné lieu à des dépôts de brevets et attendent leurs transferts industriels.

La présente thèse s'intéresse à l'utilisation de champs électromagnétiques pour contrôler la géométrie d'interface entre milieux de différentes conductivités électriques.

Contrôler une interface implique la création de forces localisées à cette interface. Les champs magnétiques de fréquence élevée présentent cette faculté. Le premier chapitre de cette thèse expose les conséquences de leur expulsion du milieu électroconducteur ou effet de peau électromagnétique, sur le mouvement dans le bain liquide, la forme de la surface libre de ce bain et la stabilisation de cette surface. Les couplages suivants y apparaissent :



et y sont explicités. Les chapitres II et III illustrent ces couplages.

* L'étude théorique du couplage 1, ou calcul de la forme de la géométrie d'équilibre de la surface libre d'un domaine liquide électroconducteur placé dans un champ magnétique dont la géométrie est connue en absence de liquide, passe par l'utilisation de méthodes telles que les transformations conformes (§ II.2), principe variationnel ou éléments aux limites (§ III.1 et III.2).

* L'étude pratique s'appuie sur des tests, sur métaux liquides froids ou chauds, d'inducteurs capables de créer des champs magnétiques adaptés aux problèmes envisagés (§ II.3).

Une importance particulière a été donnée dans cette thèse aux applications de la magnétohydrodynamique des champs magnétiques alternatifs, dans le procédé métallurgique de la coulée directe de produits minces. C'est pourquoi les études théoriques et expérimentales de contrôle de forme de lame liquide ont été complétées par une étude de leur guidage (§ II.4) et de leur impact sur un substrat mobile (§ II.5).

Notre contribution à l'étude du procédé de coulée continue horizontale consiste en une analyse de la stabilité de la zone liquide lévitée (§ III.3).

NOTATIONS

- a : épaisseur
 \mathbf{B} : champ magnétique
 B_s : champ magnétique surfacique
 B_0 : intensité caractéristique du champ magnétique appliqué
 B_s : composante du champ magnétique tangente à une surface
 B_n : composante du champ magnétique normale à une surface
 $\text{ch}(x)$ ou chx : fonction cosinus hyperbolique x
 \mathbf{F} : champ de force électromagnétique
 F : nombre de Froude = U_0 / \sqrt{gL}
 g : gravité
 I : intensité de courant électrique
 $I_n(x)$: fonctions de Bessel modifiées et de deuxième espèce d'ordre n
 J : courant électrique
 J_0 : courant de conduction
 \mathbf{k} : vecteur d'onde
 k : nombre d'onde
 K : paramètre caractéristique du formage électromagnétique = $2\gamma\mu/B_0^2$
 L : longueur caractéristique du domaine électroconducteur Ω
 \mathbf{n} : normale extérieure au domaine Ω , support de ξ_3
 N : paramètre d'interaction = $\sigma B_0^2 L / \rho U_0$
 $N_\delta = \sigma B_0^2 \delta_m / \rho U_0$
 p : champ de pression
 Q : débit
 S : surface
 $\text{sh}(x)$ ou shx : fonction sinus hyperbolique x
 R : résistance
 R_0 : rayon d'un cercle
 R_1, R_2 : rayons de courbure de la surface
 R_T : rayon de la roue
 Re : nombre de Reynolds = $L U_0 / \nu$
 Re_m : nombre de Reynolds électromagnétique = $\mu \sigma L U_0$
 Re_ω : paramètre d'écran = $\mu \sigma \omega L^2$
 \mathbf{U} ou \mathbf{u} : champ des vitesses
 U_0 : vitesse caractéristique dans le domaine électroconducteur Ω
 U_A : vitesse d'Alfvén = $B_0 / \sqrt{\mu\rho}$
 V_T : vitesse linéaire à la surface de la roue
 W : nombre de Weber = $\rho U_0^2 L / \gamma$
 $W_A = \rho U_A^2 L / \gamma = 1/K$

γ : tension superficielle

δ_m : épaisseur de peau électromagnétique = $(2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$

δ_v : épaisseur de couche limite visqueuse

ε : désigne une grandeur petite

\mathcal{K} : courbure moyenne d'une surface

ψ : fonction de courant

ϕ : fonction potentiel

λ : longueur d'onde = $2\pi/k$

μ : perméabilité magnétique du vide

ν : viscosité cinématique

ρ : masse volumique

σ : conductivité électrique

τ_s : contrainte surfacique

ω : pulsation du courant inducteur

Ω : domaine électroconducteur

$\partial\Omega$: frontière du domaine électroconducteur

ξ_1, ξ_2, ξ_3 : coordonnées locales de l'interface $\partial\Omega$

CHAPITRE I

HYDRODYNAMIQUE EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE ALTERNATIF

I.1 - EFFET D'UN CHAMP MAGNETIQUE ALTERNATIF SUR UN MILIEU ELECTROCONDUCTEUR

Ce paragraphe a pour but de souligner la spécificité d'un champ magnétique alternatif monophasé. Après avoir rappelé les propriétés de l'équation de l'induction, nous établirons les expressions du champ magnétique, des courants induits et des forces électromagnétiques dans le cas où le champ magnétique diffuse peu dans le milieu électroconducteur sur lequel il agit.

I.1.1 - Loi de l'induction

L'équation d'évolution du champ magnétique \mathbf{B} est l'équation de l'induction.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{U} \wedge \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \mathbf{B}$$

où \mathbf{U} est le champ des vitesses d'un fluide de perméabilité magnétique μ et de conductivité électrique σ constantes. L'évolution dans le temps du champ magnétique $\partial \mathbf{B} / \partial t$ est déterminée par la compétition du terme de convection du champ magnétique par le champ de vitesse et du terme de diffusion du champ magnétique dans le milieu électroconducteur de diffusivité électromagnétique $\lambda = 1/\mu\sigma$.

Cette équation, analogue à l'équation de la vorticité dans un fluide visqueux s'interprète de la même façon. Son adimensionalisation (les astérisques indiquent des grandeurs physiques adimensionnelles).

$$R_{\omega} \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} = R_m \nabla^* \wedge (\mathbf{U}^* \wedge \mathbf{B}^*) + \nabla^{*2} \mathbf{B}^*$$

fait apparaître deux nombres adimensionnels.

$R_m = \mu \sigma V L$ est appelé le "nombre de Reynolds électromagnétique"

$R_{\omega} = \mu \sigma L^2 / T$ est appelé le "paramètre d'écran"

Ici, L et V sont les grandeurs caractéristiques du domaine fluide et du champ des vitesses. La nature du champ imposé au domaine détermine le choix du temps caractéristique du champ magnétique T .

Si le champ magnétique est continu et ne présente pas de brusque variation, le temps caractéristique T n'est autre que le temps de transit d'une particule du fluide électroconducteur.

$$T \sim L / V$$

alors les deux nombres adimensionnels de l'équation de l'induction sont identiques :

$$R_{\omega} = R_m$$

et l'équation de l'induction devient :

$$\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B}^* + \nabla^* \wedge (\mathbf{U}^* \wedge \mathbf{B}^*)$$

Si R_m est grand devant l'unité, c'est à dire qu'une ou plusieurs des grandeurs V , L ou σ est grande, l'effet de diffusion du champ magnétique est négligeable face à l'effet de convection. L'évolution du champ magnétique est alors celle du champ des vitesses. Le champ magnétique est dit "gelé" dans le milieu matériel. Les grands nombres de Reynolds électromagnétiques ne se rencontrent pas à l'échelle humaine, circuits de refroidissement des surgénérateurs exceptés, R_m y est petit et le champ magnétique harmonique :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0$$

Si, à l'échelle du laboratoire, le champ magnétique présente des variations temporelles ou spatiales, il possède une échelle de temps intrinsèque différente de L/V . L'équation de l'induction est alors une équation de diffusion :

$$R_{\omega} \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t^*} = \nabla^{*2} \mathbf{B}^*$$

Comme cette équation est indépendante du mouvement du milieu électroconducteur à laquelle elle s'applique, les remarques relatives au champ magnétique qui seront faites au cours de ce paragraphe concernent des milieux conducteurs en phase solide, liquide ou gazeuse.

A cette équation de diffusion est associée une longueur δ_m caractéristique de la profondeur de pénétration du champ magnétique dans le domaine électroconducteur ou "épaisseur de peau électromagnétique". Conventionnellement, δ_m est prise comme la longueur pour laquelle :

$$R_{\omega} = 2$$

Par exemple :

* si le champ magnétique est alternatif de fréquence $\omega/2\pi$ alors T est pris égal à ω^{-1} et

$$R_{\omega} = \mu \sigma \omega L^2$$

ce qui donne une épaisseur de peau électromagnétique telle que :

$$\delta_m = (2 / \mu \sigma \omega)^{1/2}$$

* Si le champ magnétique est un champ glissant de fréquence $\omega/2\pi$ et de pas polaire τ alors le paramètre d'écran s'écrit :

$$R_{\omega} = \mu \sigma \omega \tau^2$$

et l'expression de l'épaisseur de peau électromagnétique dépend du rapport $(2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$ à τ , δ_m est telle que :

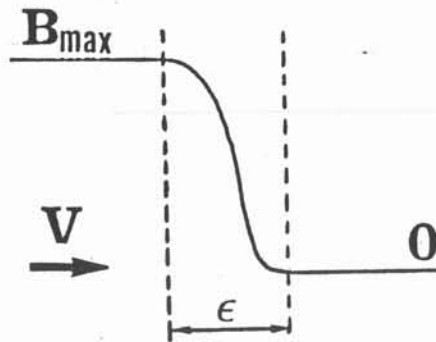
$$\delta_m = \min((2/\mu\sigma\omega)^{1/2}, \tau)$$

* Si le champ magnétique présente une variation d'intensité sur une longueur ϵ , dans la direction de l'écoulement de vitesse V , du milieu électroconducteur, T est pris égal à ϵ/V et :

$$R_{\omega} = \mu \sigma V L^2 / \epsilon$$

ce qui correspond à une épaisseur de peau électromagnétique :

$$\delta_m = (2\epsilon / \mu \sigma V)^{1/2}$$



Dans la suite de cette thèse, nous considérerons surtout les effets des champs magnétiques alternatifs. De plus, l'épaisseur de peau électromagnétique sera considérée comme petite face à la longueur caractéristique du milieu électroconducteur.

1.1.2 - Calcul du champ magnétique

1.1.2.1 - La diffusion d'un champ magnétique alternatif de fréquence $\omega/2\pi$ dans un domaine électroconducteur Ω répond à l'équation :

$$\left(\nabla^2 - \frac{2i}{\delta_m^2} \right) \mathbf{B} = 0$$

où \mathbf{B} est le champ magnétique complexe tel que :

$$\mathbf{B} = \Re e (\mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{i\omega t})$$

($\Re e$ représente la partie réelle de l'expression entre parenthèses).

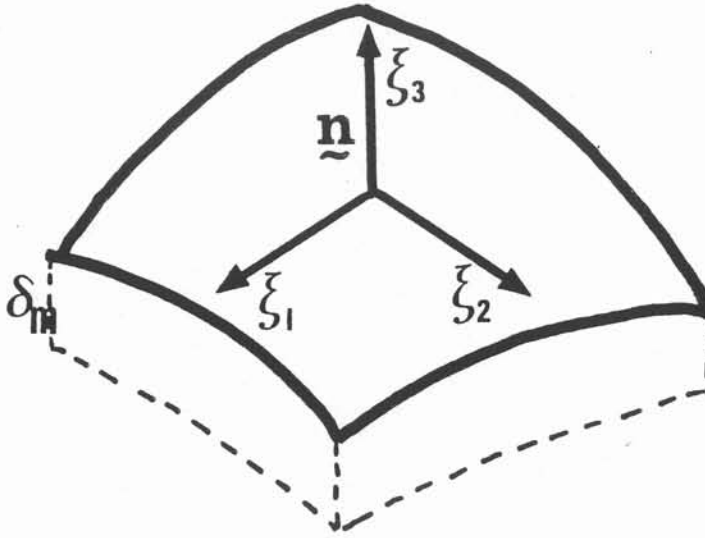
A l'extérieur du domaine Ω , le champ magnétique est harmonique

$$\nabla^2 \mathbf{B}_e = 0$$

A l'intérieur de Ω , si $\delta_m \ll L$, le champ magnétique s'écrit sous la forme (52):

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_s(\xi_1, \xi_2) + B_n(\xi_1, \xi_2) \cdot \mathbf{n}) e^{\xi_3 \delta_n} \cos(\xi_3 \delta_n + \omega t)$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les coordonnées locales de l'interface $\partial\Omega$ du domaine Ω au point de la normale extérieure \mathbf{n} .



La composante B_n est déterminée par $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ à la surface.

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0 = \nabla_s \cdot \mathbf{B}_s + \frac{\partial B_n}{\partial n}$$

La composante du champ magnétique normale à la surface varie comme l'épaisseur de peau électromagnétique δ_m . Ainsi, dans le cas limite de l'épaisseur de peau électromagnétique nulle, le champ magnétique est totalement exclu du domaine électroconducteur dont la frontière $\partial\Omega$ devient une surface de champ. Grâce au caractère harmonique du champ extérieur et lorsque la géométrie considérée est bidimensionnelle, cette surface, si elle est libre, peut être déterminée par des méthodes de transformations conformes de variables complexes (68).

1.1.2.2. Les courants électriques induits dans le milieu électroconducteur obéissent à la loi d'Ampère :

$$\mu \mathbf{J} = \nabla \wedge \mathbf{B}$$

Confinés dans la peau électromagnétique, ils sont égaux au premier ordre en δ_m / L , à

$$\mu \mathbf{J} = \frac{1+i}{\delta_m} * \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} * e^{(1+i)\xi_3/\delta_m} * e^{i\omega t}$$

ou bien

$$|J| = \frac{2|B_s|}{\mu \delta_m} * e^{\xi_3/\delta_m} * \cos(\omega t + \xi_3/\delta_m + \pi/4)$$

Lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique s'annule, le volume dans lequel circulent les courants électriques $\partial\Omega * \delta_m$ se réduit à une nappe de courant de densité surfacique

$$I_s = B_s / \mu$$

Effet Joule

Les courants électriques induits chauffent le milieu électroconducteur par effet joule. Lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est faible la puissance joule moyenne par unité de volume est :

$$\left\langle \frac{J^2}{\sigma} \right\rangle = \frac{|B_s|^2}{\mu^2 \sigma \delta_m^2} e^{\xi_3/\delta_m}$$

où les crochets $\langle \rangle$ indiquent une moyenne dans le temps. Cette quantité augmente donc comme la fréquence du champ magnétique inducteur. C'est pourquoi, l'utilisation de champs magnétiques de fréquences élevées (plusieurs centaines de kilohertz), compense la mauvaise conductivité électrique de certains matériaux comme les verres ou les oxydes métalliques, et permet leur fusion (20).

I.1.2.3. Forces électromagnétiques

Dans la peau électromagnétique, les courants induits se combinent avec le champ magnétique pour donner naissance à des forces électromagnétiques (dites de Laplace ou de Lorentz).

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$$

La décomposition de cette force, en un terme de pression $F_{\text{irrot}} = \nabla |B|^2 / 2\mu$ et un terme déviatoire $F_{\text{rot}} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} / \mu$ permet d'appréhender son mode d'action. Le rapport des ordres de grandeur respectifs de ces termes s'écrit :

$$\frac{|F_{\text{irrot}}|}{|F_{\text{rot}}|} \sim \frac{L}{\delta_m}$$

où L est l'échelle caractéristique de la variation du champ magnétique surfacique B_s le long de la surface, qui, lorsque le champ monophasé est égal à L , échelle caractéristique du domaine considéré. Alors :

$$|F_{\text{irrot}}| / |F_{\text{rot}}| \sim R_\omega^{-1/2}$$

Ainsi, si l'épaisseur de peau électromagnétique δ_m est faible, la force électromagnétique s'écrit, au premier ordre en δ_m / L .

$$\mathbf{F} = -\mathbf{n} \frac{|B_s^2|}{2\mu\delta_m} e^{2\xi_3/\delta_m} (1 + 2\cos(2(\omega t + \xi_3/\delta_m) + \pi/4))$$

qui comporte donc un terme stationnaire et un terme pulsatoire. Quand la fréquence est élevée, le fluide ne peut, à cause de son inertie, répondre aux sollicitations du second terme. Ce phénomène est caractérisé par le paramètre d'interaction, rapport des forces électromagnétiques aux forces d'inertie, construit avec, comme longueur caractéristique, l'épaisseur de peau électromagnétique δ_m (33)

$$N_\delta = \frac{\sigma B^2 \delta_m}{\rho V}$$

La partie pulsatoire de la force électromagnétique a une influence sur le mouvement du fluide si $N_\delta \gg 1$. Dans le cas contraire, $N_\delta \ll 1$, son effet est négligeable face à celui de la partie moyenne de la force électromagnétique.

Ainsi, lorsque les fréquences utilisées sont élevées, la force électromagnétique se réduit à sa partie moyenne :

$$\mathbf{F} = -\frac{|B_s^2|}{2\mu\delta_m} e^{2\xi_3/\delta_m} \mathbf{n}$$

Dans ces conditions, le saut de pression, entre la surface $\partial\Omega$ et le coeur de Ω à travers la couche électromagnétique est :

$$P_i - P_{\text{atm}} = \frac{B_s^2}{2\mu}$$

Le lecteur, habitué à voir ce saut de pression estimé à $B_s^2/2\mu$ se souviendra qu'ici, B_s est l'intensité maximale du champ magnétique, tandis que dans l'expression couramment utilisée, B_s représente l'intensité efficace.

En créant une pression à la surface d'un fluide électro-conducteur, la force électromagnétique permet donc de le contenir ou de le former ; un métal fondu peut être lévité ou formé sans paroi.

Elle n'engendre de mouvement à l'intérieur du bain liquide que par l'existence de son rotationnel, c'est à dire par le gradient surfacique de la pression électromagnétique

$$|\nabla \wedge \mathbf{F}| = - \frac{1}{\mu \delta_m} B_s \frac{\partial B_s}{\partial s} e^{2\xi_3/\delta_m}$$

Ces effets sont étudiés dans la deuxième partie de ce chapitre.

I.2-ÉCOULEMENT D'UN LIQUIDE ELECTROCONDUCTEUR EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE ALTERNATIF

I.2.1 - Expression du saut de pression à travers les couches limites électro - magnétiques et visqueuses adjacentes à une surface libre

Un domaine liquide, de dimension caractéristique L , de conductivité électrique σ , (par exemple un métal fondu), animé d'un mouvement de vitesse caractéristique U_0 , placé dans un champ magnétique alternatif de fréquence $\omega/2\pi$, voit se développer à sa frontière, paroi solide ou surface libre, deux couches limites dont les épaisseurs peuvent être faibles par rapport à L .

- la peau électromagnétique d'épaisseur $\delta_m = L R_\omega^{-1/2}$

- la couche limite visqueuse $\delta_v = L \cdot R_e^{-1/2}$

où R_e est le nombre de Reynolds de l'écoulement

$$R_e = U_0 L / \nu$$

Quand le mouvement du bain est d'origine électromagnétique, la valeur de U_0 croît avec l'intensité du champ magnétique appliqué B_0 et s'annule avec l'épaisseur de peau électromagnétique δ_m . Il est souvent commode de comparer la valeur de U_0 à celle de la vitesse d'Alfvén.

$$U_A = B_0 / \sqrt{\mu \rho}$$

De plus, l'ordre de grandeur de U_0 dépend de l'épaisseur relative des deux couches limites, c'est à dire du facteur δ_m/δ_v , et du type de frontières (libre ou solide) qui limitent le domaine électroconducteur.

Avant de commenter et d'illustrer cette dernière remarque, nous allons établir l'expression du saut des contraintes normales à une surface libre à travers les deux couches limites qui lui sont adjacentes.

L'écoulement d'un fluide est décrit par l'équation de Navier-Stokes qui, en régime permanent et pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = (-\nabla(p + \rho g z) + \mathbf{F}) / \rho + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

où \mathbf{F} est la force électromagnétique qui se réduit à sa composante irrotationnelle $-\nabla[B^2/2\mu]$ dans le cas des faibles épaisseurs de peau.

L'expression du saut des pressions se fait par projection de cette équation sur la direction s , tangente à la vitesse surfacique \mathbf{u}_s , dans un repère lié à la surface de normale extérieure \mathbf{e}_3 , puis par intégration le long de la surface. La projection donne

$$u_3 \frac{\partial u_s}{\partial \xi_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (u_s^2) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (p + \rho g z + \frac{B^2}{2\mu}) + \nu \nabla^2 u_s$$

L'intégration de ces expressions le long de la surface donne

$$\frac{1}{2} u_s^2 + \frac{p_i - p_e}{\rho} + gz + \frac{B_s^2}{2\mu\rho} - \nu \int_0^s \nabla^2 u_s ds = 0$$

Or les conditions d'équilibre d'une interface entre un liquide incompressible et un gaz sont les suivantes (Batchelor (4))

* condition 1 :

La nullité de la composante tangentielle du tenseur des contraintes e_{ij} à l'interface.

$$e_{ij} t_i n_j = 0$$

* condition 2 :

L'existence d'une tension superficielle γ compensant le saut des contraintes normales (pression et viscosité).

$$p_{int} - p_{ext} - 2\nu\rho(e_{ij} n_i n_j) = 2\gamma \mathcal{K}$$

où \mathcal{K} est la courbure moyenne de la surface au point considéré.

$$\mathcal{K} = (1/R_1 + 1/R_2) / 2$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux.

Le saut de pression dû aux contraintes visqueuses est fréquemment ignoré face au saut de pression statique. La tension superficielle est souvent prise constante à la surface, ce qui n'est pas toujours le cas pour certains métaux liquides dont la tension superficielle est parfois fortement dépendante de la température.

L'expression du saut des pressions s'écrit donc :

$$u_s^2/2 + 2\mathcal{K}\gamma/\rho + gz + B_s^2/2\mu\rho = Cte$$

Quand le système étudié présente une ligne de symétrie ou un point singulier, la constante est évaluée en ce point. Par exemple le point bas d'un corps de révolution lévité est un point d'arrêt pour le champ magnétique et pour le champ des vitesses ; si de plus, ce point est l'origine des cotes $z_0 = 0$, alors la constante s'écrit :

$$Cte = \mathcal{K}_0 \gamma / \rho$$

L'adimensionnalisation de cette expression

$$u_s = U_0 u_s^* \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}^*/L \quad z = L z^* \quad B_s = B_0 B_s^*$$

fait apparaître les nombres sans dimension gouvernant l'équilibre de l'interface.

$$\frac{1}{2} \frac{U_o^2}{g L} u_s^{*2} + 2 \mathfrak{H}^* \frac{\gamma}{\rho g L^2} + z^* + \frac{B_o^2}{2 \mu \rho g L} B_s^{*2} = Cte$$

- * le paramètre $U_o/\sqrt{gL} = F$ est un nombre de Froude, rapport des forces d'inertie aux forces de gravité,
- * le paramètre $\gamma/\rho g L^2$ est le rapport des forces de tension superficielle aux forces de gravité ($=F^2/W$, où W est un nombre de Weber).
- * le paramètre $B_o^2/\mu \rho g L$, est le "paramètre de lévitation électromagnétique", rapport des forces électromagnétiques aux forces de gravité.

Lorsque la géométrie permet de ne pas considérer les termes de gravité, l'équation s'écrit :

$$\left(\frac{U_o}{U_A}\right)^2 u_s^{*2} + \frac{2 \mu \gamma \mathfrak{H}^*}{B_o^2 L} + B_s^{*2} = Cte$$

- * le paramètre $2 \mu \gamma/B_o^2 L$ caractérise le formage électromagnétique.
- *le paramètre U_o/U_A caractérise la contribution des termes inertiels (pression dynamique) à la forme d'équilibre de l'interface.

Lorsque la géométrie étudiée stipule que $U_o/U_A \ll 1$ alors la position d'équilibre de l'interface est considérée comme indépendante du mouvement. C'est l'approximation de la magnétostatique qui sera utilisée lors de tous les calculs d'équilibre de surface présentés dans cette thèse (chapitre II et III).

L'écoulement dans le bain va être étudié afin de déterminer l'ordre de grandeur de U_o .

1.2.2 -Ecoulement de métaux liquides

Le bain de métal liquide se décompose en trois zones : deux couches limites et le coeur.
Comme le montre le tableau suivant, les viscosités des métaux liquides sont faibles :

métal	Al	Cu	Fe	Ga	Hg	Sn
température de fusion (° C)	660	1083	1535	30	-39	232
viscosité cinématique (m ² . s ⁻¹)	1,9.10 ⁻⁶	5,5.10 ⁻⁷	6,7.10 ⁻⁷	3,3.10 ⁻⁷	1,4.10 ⁻⁷	2,9.10 ⁻⁷

Ainsi, même pour des dimensions ou des vitesses de bain modestes, le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé et l'écoulement turbulent. Toutefois d'après le théorème de Batchelor (5), pour des écoulements bidimensionnels ou axisymétriques, considérer l'écoulement moyen dans le cœur comme stationnaire et à vorticité constante peut s'avérer une excellente approximation. Dans ce cas, les lignes de courant se referment dans le cœur. La turbulence n'est alors étudiée que pour son influence sur les transferts. Cette approximation implique que la forme des lignes de courant est indépendante de l'intensité du champ magnétique appliqué. Elle est encore plus pertinente quand l'absence de paroi supprime les zones de forte dissipation visqueuse.

* Ainsi, Fautrelle (25) calcule le mouvement moyen de la section droite d'un cylindre de liquide électroconducteur, contenu dans une paroi circulaire Γ comme la solution du problème

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = -\omega_0 \\ \text{et } \psi = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où ψ est la fonction de courant de l'écoulement

ω_0 est la constante de vorticité déterminée par les conditions aux limites.

* Mestel détermine le mouvement dans un volume de révolution lévité par un inducteur à spires coniques comme

$$\begin{cases} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = -\beta R^2 \\ \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où R, z expriment les coordonnées cylindriques

$\beta = \omega_0/R$ est la constante de vorticité dans le cœur.

Comme le cas traité par Fautrelle est relativement simple, il lui est possible, moyennant de complexes calculs analytiques introduisant des séries de Fourier tronquées à deux termes, d'approcher la valeur de ω_0 par les conditions aux limites. Ceci ne peut être le cas dans des géométries plus complexes. La difficulté consiste alors dans la détermination de la valeur réelle de ω_0 pour des conditions géométriques données. Diverses méthodes numériques sont proposées par Mestel (50) pour résoudre ce problème. De plus il remarque que la vitesse caractéristique de bain U_0 augmente comme β . Lorsque β est élevé, la surface du volume lévité s'étire le long de l'axe de symétrie sous l'effet des termes inertiels.

Les vitesses attendues dans le bain liquide à la limite de deux sous couches vont être établies.

1.2.3 - Ecoulement adjacent à une paroi

Moffatt (52), utilisant une approximation de lubrification, montre que l'intégration de l'équation de mouvement à travers les deux couches limites permet de remplacer:

- la condition de non glissement par une vitesse tangentielle induite u_s , si la frontière du domaine liquide est une paroi.
- la condition de contrainte tangentielle nulle par une contrainte surfacique τ_s , si la frontière est libre.

L'expression de la vitesse de paroi induite à l'extérieur des deux couches limites est :

$$u_s = \frac{\delta_m^2}{16 \mu \rho \nu} |\nabla B_s|^2$$

Les conditions de validité de cette expression sont :

$$\delta_m / \delta_v \ll 1 \quad \text{et} \quad Re \gg 1$$

L'ordre de grandeur de la vitesse caractéristique du bain issu de cette expression est :

$$U_0 \sim \frac{B_0^2}{\mu \rho} \frac{\delta_m^2}{\nu L}$$

ou bien
$$U_0 \sim U_A (\delta_m / \delta_v)$$

Toutefois, dans le cas de brassage électromagnétique en creuset par exemple, l'hypothèse $\delta_m / \delta_v \ll 1$ n'est pas valide. Taberlet (75) considère qu'il existe sur la paroi une sous couche visqueuse turbulente où les termes de frottement équilibrent les termes électromagnétiques, et propose la vitesse de bain suivante :

$$U_0 \sim U_A (\delta_m / L)^2$$

Cet ordre de grandeur, indépendant de la viscosité du bain, est cohérent avec l'hypothèse de la constance de la vortacité de l'écoulement moyen. Il est également établi, avec une argumentation différente, par Hunt et Moore(53) .

En outre, Taberlet (75) montre que la peau électromagnétique est sujette à une turbulence dont l'échelle l_g des grosses structures est de l'ordre de $\delta_m / 2$.

$$l_g \sim \delta_m / 2$$

et que, pour une fréquence donnée, l'intensité de la turbulence est indépendante de l'intensité du champ magnétique appliqué.

1.2.4 - Ecoulement adjacent à une surface libre

Dans le cas où l'interface est une frontière libre, la contrainte surfacique issue de l'analyse de Moffatt (52) est :

$$\tau_s = \delta_m \star \nabla |B_s|^2 / 8\mu$$

Les conditions de validité de cette expression sont :

$$R_e \gg 1 \quad \text{et} \quad (\delta_m L) / \delta_v^2 \ll 1$$

Pour les métaux liquides, la seconde condition est encore plus sévère que celle qui soutendait l'expression de la vitesse tangentielle induite à la paroi.

L'ordre de grandeur de vitesse issu de l'expression de la contrainte tangentielle est :

$$U_0 \sim \frac{B_0^2 \delta_m}{\mu \rho v} \sim U_A (\delta_m L)^{1/2} / \delta_v$$

Elle établit l'équilibre local dans la couche électromagnétique des termes visqueux et des termes électromagnétiques.

Lorsque la condition $(\delta_m L) / \delta_v^2 \ll 1$ est vérifiée, le terme inertiel n'influence pas la forme de la surface libre et l'hypothèse de la magnétostatique est valide

Dans le cas contraire, $(\delta_m L) / \delta_v^2 \gg 1$, l'ordre de grandeur de U_0 devient trop grand pour être réaliste. Deux analyses peuvent alors être tenues pour établir un ordre de grandeur physiquement convenable pour U_0 .

La première (Sneyd et Moffatt (72)) consiste à supposer que l'écoulement est turbulent. Dans ce cas, ce sont les contraintes de Reynolds qui équilibrent les forces électromagnétiques, ce qui impose un ordre de grandeur pour U_0 tel que :

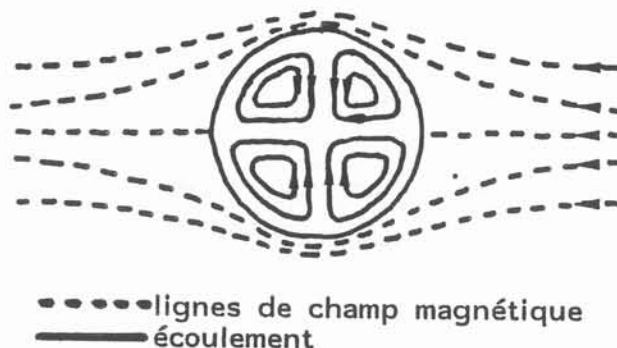
$$U_0 \sim U_A$$

Ceci limite les effets de la pression dynamique sur la forme de la surface. L'introduction d'une viscosité turbulente $\nu_t = U_A L$ autorise alors le calcul de l'écoulement comme celui d'un écoulement à faible nombre de Reynolds. C'est ainsi que Sneyd et Moffatt calculent l'écoulement dans la section d'un tore lévité par deux anneaux conducteurs, concentriques, parcourus par des courants électriques de même intensité et de même sens.

Ce raisonnement est aussi suivi par Deframond (16) pour le calcul de l'écoulement dans la section droite d'un jet électroconducteur formé électromagnétiquement par un champ magnétique créé par un inducteur quadripolaire.

Cette analyse impose donc que les symétries de l'écoulement respectent celles des contraintes électromagnétiques de surface.

Or, ceci n'est pas toujours le cas, comme le remarque Mestel (50). Ce fait est illustré par l'exemple suivant. Une sphère de rayon a , de liquide électroconducteur est placée dans un champ magnétique uniforme à l'infini. Sa tension superficielle est supposée suffisamment forte pour permettre au domaine liquide de conserver sa sphéricité.



Lorsque l'intensité du champ magnétique appliqué est faible

$$(\delta_m L) / \delta_v^2 \ll 1$$

et l'écoulement dans un plan méridien présente deux vortex. Lorsque l'intensité du champ magnétique croît alors :

$$(\delta_m L) / \delta_v^2 \gg 1$$

et l'écoulement ne présente qu'un seul vortex, le second n'existe plus qu'à l'état résiduel. Mestel (49) confirme ce phénomène de deux manières :

- sur des expériences numériques menées sur des configurations présentant une légère dissymétrie,
- et analytiquement, par intégration de l'équation de Navier-Stokes sur une ligne de courant passant dans la peau électromagnétique lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé.

Il avance alors que ce ne sont pas les termes visqueux mais les termes inertiels qui équilibrent les termes électromagnétiques dans la peau électromagnétique alors :

$$U_O \sim U_A$$

Cet ordre de grandeur est le même que celui proposé par l'analyse précédente. L'écoulement est alors calculé comme décrit au paragraphe 1.2.2.

1.2.5 - Écoulement : conclusion

L'absence de mesure dans les expériences de lévitation ne permet pas de trancher entre ces deux analyses. Toutefois, des résultats d'expériences sur le brassage électromagnétique (Taberlet(75)) montre que :

- l'écoulement moyen dans le coeur est composé de vortex dont la vorticité est constante,
- la distribution géométrique de ces vortex dépend de la fréquence du champ magnétique mais pas de son intensité.

Les conditions expérimentales sont $R_e \gg 1$ et $0,07 < \delta_m / L < 0,7$.

Il est donc légitime de penser qu'en l'absence de paroi lorsque $R_e \gg 1$ et $\delta_m / L \ll 1$, l'écoulement s'organise en vortex présentant une vorticité constante de géométrie indépendante de l'intensité du champ magnétique appliqué. Alors la vitesse caractéristique du bain U_0 est de l'ordre de la vitesse d'Alfvén et l'équation de l'interface s'écrit :

$$\frac{B_o^2}{2 \mu \rho g L} (u_s^{*2} + B_s^{*2}) + 2 \mathcal{H}^* \frac{\gamma}{\rho g L^2} + z^* = \text{Cte}$$

où u_s^* est la vitesse de métal liquide dans le coeur à la frontière des deux couches limites.

De plus, Sneyd (73) a montré que seuls les cylindres infinis placés dans des champs magnétiques perpendiculaires à leur axe présentent des écoulements stationnaires. Dans la réalité de telles configurations n'existent pas et les écoulements subissent donc de lentes variations dans le temps.

1.3 - STABILISATION D'INTERFACE PAR CHAMP MAGNETIQUE ALTERNATIF

1.3.1 - Stabilisation et champ magnétique

Un champ magnétique uniforme stationnaire engendre dans un milieu électroconducteur fluide animé d'un mouvement turbulent, une dissipation d'énergie cinétique importante par effet Joule. Ce phénomène privilégie l'existence, dans le fluide, de "structures colonnaires" d'axe parallèle au champ magnétique. La longueur caractéristique de ces structures, $l_{//}$, est liée à leur rayon, l_{\perp} par la relation (Sommeria - Moreau (74))

$$l_{//} = \sqrt{N} l_{\perp}$$

où N est le paramètre d'interaction, rapport des forces électromagnétiques aux forces d'inertie, soit :

$$N = \sigma B_o^2 l_{\perp} / \rho U$$

L'effet d'anisotropisation de la turbulence par le champ magnétique augmente avec N . On parle alors de stabilisation des structures d'axe parallèle à la direction du champ magnétique. Une des utilisations les plus connues de cet effet est son application par Libchaber (26) à l'étude des transitions vers le chaos de l'instabilité de Rayleigh Bénard.

Confiné à la surface d'un bain électroconducteur, un champ magnétique alternatif de fréquence élevée, n'agit pas sur les structures turbulentes du coeur du liquide, seule la peau électromagnétique est affectée par la présence du champ. Là, la dimension caractéristique des grosses structures rapportées par Taberlet (75) est

$$l = \delta_m / \sqrt{2}$$

Toutefois nous avons vu que le paramètre d'interaction correspondant :

$$N = \sigma B_o^2 \delta_m / \rho U$$

n'est jamais très élevé. Il ne peut donc y avoir anisotropisation de la turbulence dans la peau électromagnétique. On ne peut donc parler de stabilisation de l'écoulement par un champ magnétique de fréquence élevée. Par contre, un tel champ est capable de stabiliser l'interface d'un liquide électroconducteur et d'un fluide isolant, de vitesses parallèles de modules différents (instabilité de Kelvin Helmholtz). Cet effet est anisotrope, privilégiant l'amortissement des vecteurs d'onde parallèles au champ magnétique. Lorsque le champ magnétique appliqué n'est pas uniforme, des mouvements de brassage électromagnétiques existent, qui conduisent l'écoulement à un état turbulent. Nous définirons donc quelles sont les configurations d'interface qui autorisent l'uniformité du champ surfacique. De plus, nous montrerons que l'existence de lignes de symétrie dans la géométrie du champ magnétique inducteur, créant des points d'arrêt du champ magnétique en certains points de la surface du liquide électroconducteur, n'autorise pas une stabilisation locale de la surface en ces points. En revanche, la variation du champ magnétique perpendiculairement à la surface étant forte au voisinage de ces points, il existe des forces de rappel qui permettent un guidage électromagnétique des veines métalliques liquides.

1.3.2 - Effet d'un champ magnétique alternatif

Un champ magnétique alternatif a un pouvoir stabilisant qui rappelle beaucoup celui d'un champ magnétique continu face à un milieu infiniment conducteur (Chandrasekhar (11)).

Ce phénomène est énoncé par Schaffer(65) de la façon suivante : "la présence d'un champ magnétique alternatif sur une surface plane, perturbée par une onde sinusoïdale d'amplitude ε , telle que

$$\varepsilon \ll \delta_m$$

impose une pression magnétique plus grande sur les crêtes de l'onde que dans les creux".

Les expériences rapportées dans la suite de cet article (Schaffer (65)) ne mettent pas en évidence cet amortissement. Un métal liquide remplit une boîte placée dans un champ magnétique alternatif. Des perturbations sont créées à la surface du liquide. Des mesures de variations du champ magnétique prouvent que la fréquence des ondes de résonance augmente avec l'intensité et la fréquence du champ magnétique appliqué.

L'effet d'amortissement des perturbations de l'interface séparant un métal liquide de l'air ambiant, par la pression magnétique est démontré par Garnier et Moreau (34), qui établissent l'équation caractéristique de la perturbation de l'interface horizontale de deux fluides de densité ρ_1 et ρ_2 , animés de vitesses U_1 et U_2 ($U_1 \parallel U_2$), soumise à un champ magnétique uniforme d'intensité B_0 faisant un angle θ avec le vecteur d'onde k , de longueur $\lambda = 2\pi/k$:

$$\rho_1 (s + kU_1)^2 + \rho_2 (s + kU_2)^2 + gk(\rho_1 - \rho_2) - \gamma k^3 - F(k, \theta) = 0$$

où $F(k, \theta)$ représente la contribution du champ magnétique

$$F(k, \theta) = \frac{B_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{2\mu} F(k \delta_m)$$

où $F(x)$ est une fonction qui tend vers $1/x$ quand x tend vers l'infini et $F(x) = 1$ si $x = 0$.

Ainsi le champ magnétique a son effet d'amortissement maximum sur les vecteurs d'onde qui lui sont alignés ($\theta = 0$) et un effet nul sur ceux qui lui sont perpendiculaires ($\theta = \pi/2$). Pour un vecteur d'onde donné, cet effet décroît quand l'épaisseur de peau augmente. Une tension superficielle équivalente γ_e peut être introduite :

$$\gamma_e = \frac{B_0^2 \cos^2 \theta}{2\mu k} F(k \delta_m)$$

L'analyse ci-dessus est complétée par Garnier (30) qui établit que, sous l'effet du champ magnétique, un mouvement rotationnel peut s'installer dans le fluide. Cet effet se réduit à une composante tangentielle lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique

est nulle. L'analyse complète de la stabilité de la géométrie ci-dessus n'a jamais été réalisée. Deux autres phénomènes importants sont soulignés par Garnier (30) :

- un champ magnétique glissant, de fréquence élevée, stabilise une surface libre comme un champ magnétique uniforme.
- l'application de champs magnétiques perpendiculaires et de fréquences différentes ne compense que partiellement les effets de l'anisotropie de l'effet stabilisant du champ magnétique.

Ainsi, il est légitime de penser que, puisqu'un champ magnétique alternatif face à un milieu de conductivité finie a un effet similaire à celui d'un champ magnétique continu sur un milieu infiniment conducteur, l'instabilité capillaire d'un jet liquide peuvent être annihilé par un champ magnétique axial de fréquence suffisamment élevée et d'intensité raisonnable (de l'ordre d'une centaine de gauss).

Toutefois, les résultats exposés ci-dessus ne tiennent pas compte de phénomènes, comme les mouvements engendrés dans le bain liquide, que seule la viscosité peut amortir, ou bien de la dimension finie des bains liquides, ni d'éventuels effets de bout ni, surtout, des effets thermiques.

Or, dans toutes les expériences où un champ magnétique alternatif et un métal fondu sont présents, des ondulations existent à la surface de ce dernier. Mac Hale et Melcher (47) mesurent l'intensité minimale du champ magnétique alternatif uniforme situé à la surface horizontale d'un bain de Cerrelow-alloy, nécessaire à l'apparition d'ondulations à la surface. Ces ondulations sont, d'après les auteurs, d'origine thermique, mais d'apparence électromagnétique.

Même si grâce à des systèmes de refroidissement adéquats les effets thermiques peuvent être évités, l'effet de stabilisation du champ magnétique peut être caché, par exemple, par des mouvements de brassage dus à un défaut d'uniformité du champ.

1.3.3 - Uniformité du champ magnétique

La non uniformité du champ magnétique, analysée dans ce paragraphe, peut provenir de deux facteurs :

- la surface d'équilibre entre le domaine liquide et l'atmosphère ne voit un champ magnétique constant que si la pression électromagnétique est bien plus grande que tous les autres termes dans l'expression du saut des contraintes normales à la surface.
- dans la pratique, les dimensions des domaines sur lesquels on agit sont de dimension finies.

Le saut des contraintes normales à l'interface d'un milieu électroconducteur avec l'air ambiant est constant. Il s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{U_o^2}{gL} u_s^{*2} + 2 \frac{\gamma}{\rho gL} \mathcal{H}^* + z^* + \frac{B_o^2}{2\mu\rho gL} B_s^{*2} = \text{Cte}$$

Lorsque le champ magnétique est constant cette relation se réduit à :

$$\frac{1}{2} \frac{U_o^2}{gL} u_s^{*2} + 2 \frac{\gamma}{\rho gL} \mathcal{H}^* + z^* = \text{Cte}$$

Dans l'hypothèse de la magnétostatique (§ 1.2), une surface libre est une surface de champ constant si :

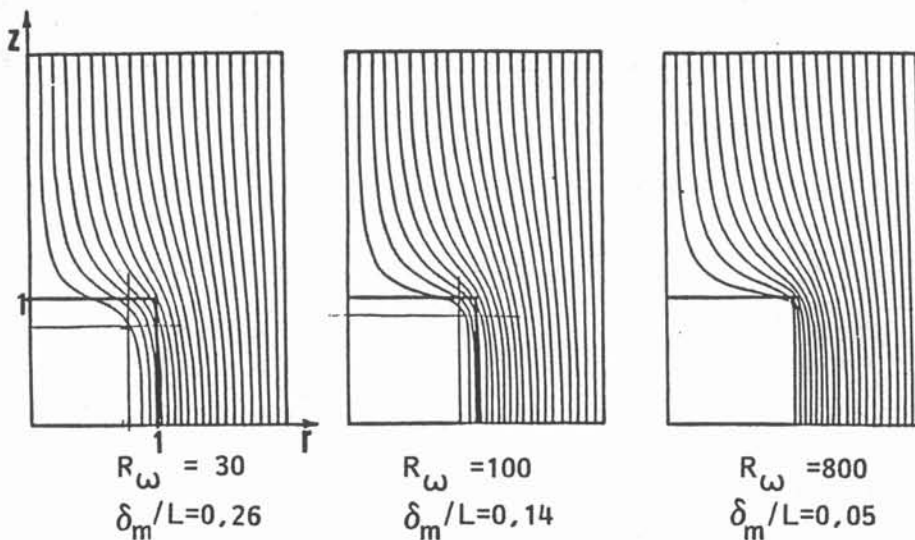
$$2(\mathcal{H}^* - \mathcal{H}_0^*) \frac{\gamma}{\rho g L} = z_0^* - z^*$$

Si, de plus, la géométrie est telle que la gravité puisse être négligée, les surfaces sur lesquelles le champ est constant présentent une courbure constante. Enfin, si la tension superficielle est si faible que sa contribution à l'équilibre de l'interface puisse être négligée alors toutes les surfaces sont des surfaces à champ constant.

Toutefois, comme le champ magnétique est harmonique, il varie suffisamment lentement pour être considéré comme uniforme localement et donc stabilisant, si les mouvements de brassage dus au gradient surfacique du champ magnétique ne déstabilise pas l'interface.

Les problèmes de stabilisation sont donc rencontrés quand la géométrie de la surface ou du champ présentent une variation rapide.

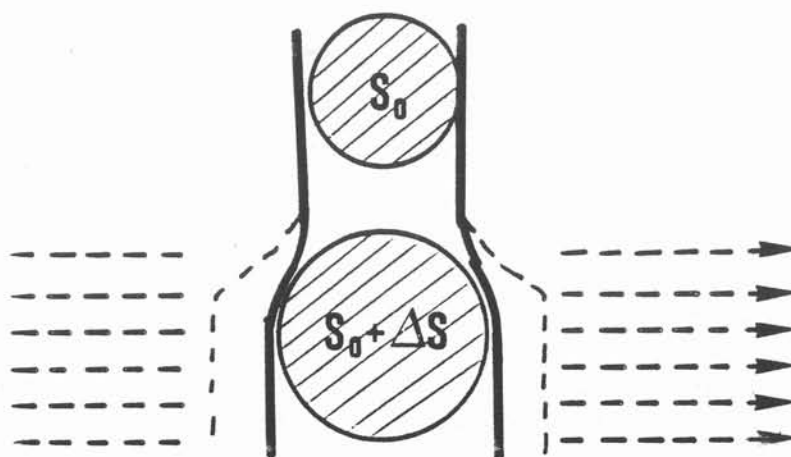
Si la dimension caractéristique du domaine électroconducteur est plus petite que celle du champ magnétique, par exemple une boîte contenant un métal liquide placée dans un champ magnétique uniforme, les lignes de champ sont déformées aux extrémités du domaine. Fautrelle (25) a calculé la forme des lignes d'un champ magnétique alternatif uniforme déviées par la présence d'un tronc de cylindre électroconducteur.



Solutions numériques des équations de Maxwell. La géométrie étudiée est un tronc de cylindre circulaire placé dans un champ magnétique uniforme. Les lignes de champ magnétique sont tracées, pour 3 valeurs de R_ω , dans un demi-plan méridien.

La non-uniformité du champ magnétique dans les coins engendre un brassage électromagnétique qui peut être suffisamment vigoureux pour agiter l'ensemble du bain. Si une surface est libre et que sa stabilisation est souhaitée, il faut isoler mécaniquement les coins du réservoir du reste du fluide.

Le cas inverse est rencontré dans la dimension caractéristique du domaine liquide est beaucoup plus grande que celle du champ magnétique. Ce cas peut être illustré par un jet liquide entrant dans un champ magnétique.



On peut montrer (Etay (23)) qu'à son entrée dans le champ magnétique, la section transversale du jet subit une augmentation d'aire ΔS , telle que :

$$\Delta S = \frac{S_0^3}{\rho Q^2} \left(\frac{B_s^2}{2\mu} + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right)$$

où $S_0 = \pi R_0^2$ est la surface du jet avant son entrée dans le champ magnétique.

Q est le débit du jet

B_s et R_1 sont le champ magnétique et les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface du jet dans le champ magnétique. Cet effet existe quelque soit la configuration géométrique du champ magnétique appliqué.

A cette augmentation de l'aire de la section transversale du jet correspond une diminution lors de la sortie du champ magnétique. Des perturbations de la surface du jet sont associées à ces variations de section.

Lorsque le champ magnétique appliqué présente des points ou des lignes de symétrie, il existe à la surface du milieu électroconducteur des points où le champ magnétique est minimum voire nul si $\delta_m = 0$. Le champ magnétique est d'autant plus faible au voisinage de ces points que la peau électromagnétique est faible. Ceci est clairement illustré sur les schémas issus des calculs de Fautrelle présentés ci-dessus. On ne peut donc attendre aucune stabilisation de la surface libre en ces points par un champ magnétique alternatif monophasé.

Nous allons maintenant exposer des moyens pratiques de supprimer ce trou de potentiel ainsi que les avantages que présentent certaines configurations de champ magnétique liées à cette présence.

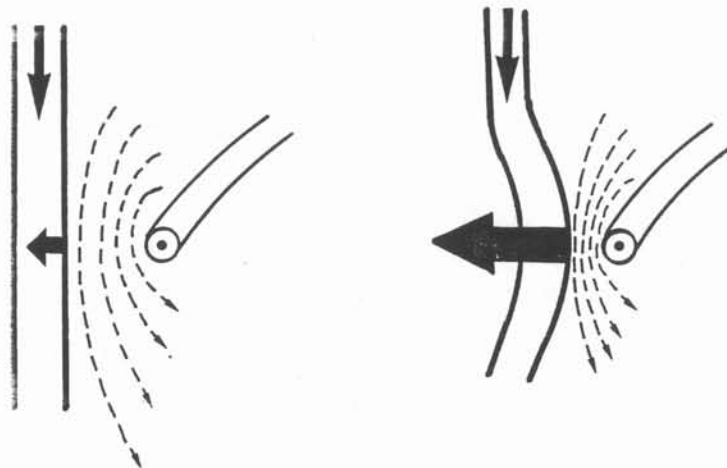
1.3.4 -Guidage électromagnétique

Nous venons d'exposer pourquoi les régions de faible intensité de champ magnétique sont indésirables lorsqu'on cherche à stabiliser une interface. Nous allons montrer que cette géométrie de champ est très utile quand on veut guider un jet dans une direction qui serait différente de celle d'un écoulement libre sous l'effet de son inertie et de la gravité.

Rapportant les premières expériences de lévitation électromagnétique en spires coniques, Ockress et al (57) remarquent que le métal lévité, fondu par induction a tendance à goutter sur l'axe de symétrie du cône inducteur et qu'il existe une force de rappel permettant de recentrer la charge lorsque son axe s'écarte de l'axe de symétrie de l'inducteur.

Pour compenser la déficience centrale de leur inducteur, et permettre la lévitation de métal fondu de faible tension superficielle, les auteurs proposaient de créer des feuilles de courant ou un solénoïde en forme de tore, idée étudiée par la suite par Sneyd et Moffatt (72), ou bien de déplacer mécaniquement le solénoïde afin que l'inertie de la charge l'empêche de répondre aux sollicitations de la gravité. Cette idée a été concrétisée par Biasse (7) dans des expériences de simulation de "soudure au plafond". L'inducteur proposé est composé de deux épingles situées dans le même plan et dont les branches sont alternées. Ces épingles sont alimentées par des courants électriques de fréquences distinctes mais voisines. Ainsi, il n'existe pas de points d'arrêt permanents sur un cordon liquide situé au-dessus de cet inducteur.

L'autre effet rapporté par Ockress et al (57) est favorable à une stabilisation globale de la charge dans les zones de faible intensité de champ magnétique. La force de rappel est d'autant plus importante que le gradient de champ magnétique perpendiculaire à la surface est fort comme l'illustre le schéma ci-dessous :



Cette force est donc capable de contrer les effets de l'inertie du jet ou de la gravité et de guider le jet dans une direction choisie. Divers inducteurs autorisant ce guidage électromagnétique ont été testés. Ainsi, Etay et Garnier (24) font dévier un jet de mercure, s'écoulant sous l'effet de la gravité, d'un angle de 10° par rapport à la verticale, grâce à l'emploi d'un inducteur de type quadripolaire alterné. Deframond (16) recentre une

lame de mercure dans l'axe d'un inducteur composé de deux étages de deux bobines de polarités opposées.

Les effets de formage, guidage et coalescence électromagnétique de jets de métaux liquides seront détaillés et illustrés dans le deuxième chapitre de cette thèse. Le troisième chapitre sera consacré à la lévitation électromagnétique.

CHAPITRE II

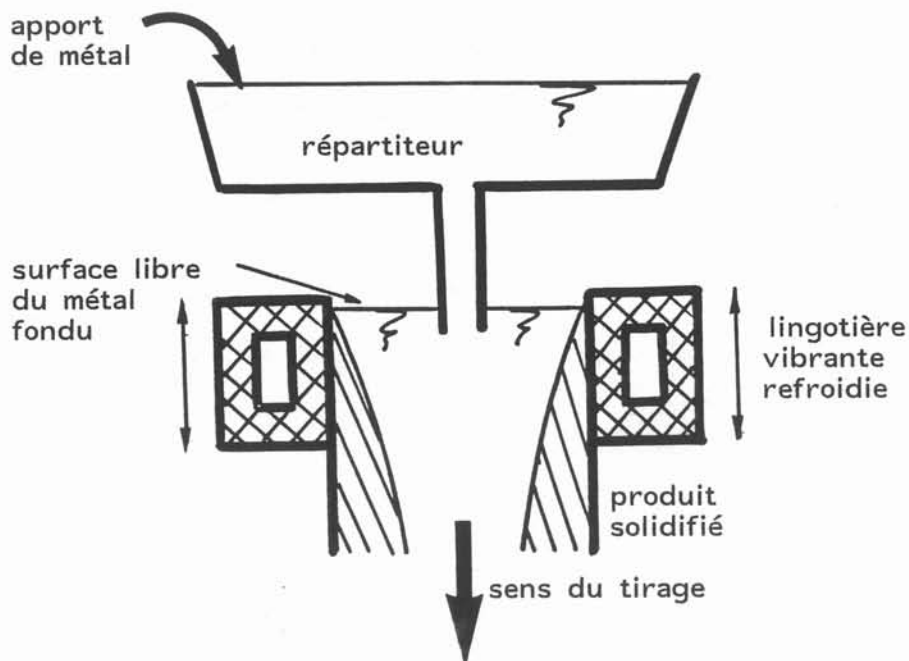
JETS

Les jets de métaux fondus sont absents des procédés métallurgiques classiques. Le métallurgiste préfère employer des parois pour contenir, guider et former le métal. Pourtant, l'utilisation de champs magnétiques alternatifs de fréquence élevée, peut permettre la suppression des parois ou l'amélioration de la forme des busettes d'amenée de métal ou bien encore de guider le jet de métal fondu dans une direction privilégiée.

II.1 - PROCEDES METALLURGIQUES

II.1.1. - Supression des parois en coulée continue

Un procédé métallurgique très employé pour l'élaboration des produits plats est la coulée continue verticale. Le produit est élaboré de la façon suivante : le métal, préalablement fondu, s'écoule du répartiteur, par une busette immergée dans une lingotière vibrante refroidie dans laquelle le produit coulé se solidifie superficiellement.



Les produits sont tirés sous l'effet de la gravité puis débités à la longueur désirée. Pour certains matériaux, comme l'aluminium, les brames sont débarrassées de leur couche superficielle (scalpage), pour d'autres cette couche est incorporée au produit fini lors des passages en laminoir.

Dans ce procédé, la substitution des forces électromagnétiques adéquates aux parois de réfractaires des moules présenteraient deux avantages :

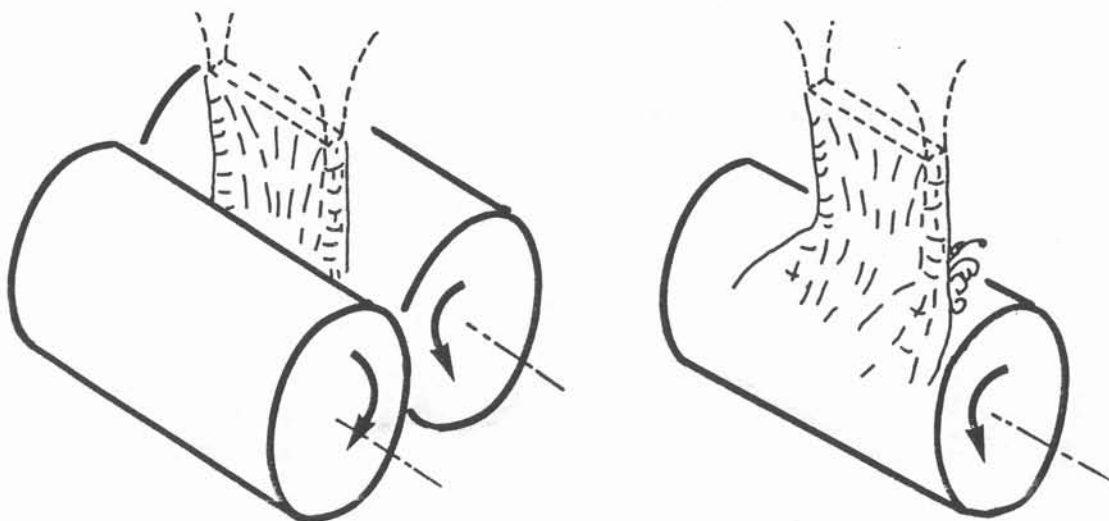
- la surface du produit élaboré serait exempte des pollutions dues au contact de la lingotière vibrante. La perte de matière due au scalpage ou les inclusions de réfractaire dans le produit fini pourraient être évitées.

- De plus, le produit pourrait être solidifié en un profil déjà ébauché. Les premiers passages en laminoir seraient alors supprimés, ainsi que le réchauffage associé. Ceci dégagerait des gains considérables d'investissement et d'énergie.

II.1.2 - Application à la coulée directe de produits minces

Toutefois, plutôt que d'améliorer un procédé bien rodé mais qui montre ses limites, particulièrement dans l'élaboration de produits minces, les potentialités des forces électromagnétiques seront mieux exploitées en participant à la résolution de certains problèmes auxquels se heurte la mise au point du procédé de "coulée directe". Ce procédé consiste à solidifier directement les produits minces à des épaisseurs proches de celles du produit fini. Les grandes vitesses de solidification inhérentes au procédé permettent la suppression de certains défauts métallurgiques liés à la solidification lente des alliages métalliques, comme des grains grossiers ou orientés ou des ségrégations chimiques, qui jusqu'à présent sont éliminés par des déformations plastiques (laminoir) et des traitements thermiques (recuits).

Divers types de coulées directes sont à l'étude. Dans cette thèse, nous n'examinerons que les deux procédés présentant une coulée verticale : entre deux rouleaux ou sur un seul rouleau. La coulée horizontale sera évoquée dans le chapitre concernant la lévitation électromagnétique.



Le procédé utilisant un seul rouleau (melt spinning) est utilisé pour la fabrication de tôles amorphes ou microcristallisées ainsi que de superalliages (Jech et al (43)). Les largeurs des produits ainsi élaborés atteignent une dizaine de centimètres au maximum. Le but poursuivi par les industriels japonais sur les installations comportant deux rouleaux (Kawasaki Steel, Nippon Steel) est la coulée directe de tôles d'acier inoxydable minces, d'épaisseur 1 mm à 3 cm et de largeur 1m.

Un problème commun à ces deux procédés est celui de l'alimentation en métal fondu. En effet, l'homogénéité du produit élaboré par coulée directe est liée à l'absence de gradient thermique horizontal dans la zone d'alimentation. Cette condition est difficilement remplie quand la busette est immergée ou de faible allongement.

L'apport en métal fondu doit se faire la plus régulièrement possible, c'est à dire, soit par un déversoir dont le niveau est soigneusement contrôlé, soit par utilisation d'une fente horizontale de section rectangulaire très allongée. Or la tenue mécanique et thermique des réfractaires usinés en fente mince est très mauvaise. Ils se fendent facilement et s'érodent très vite. De plus, il peut arriver que le métal se solidifie dans la fente, l'obstruant ainsi partiellement ou complètement. Dans le paragraphe II.3.3 de cette thèse, la mise en forme de lames liquides de plusieurs jets cylindriques et leur coalescence sera décrite et proposée comme substitution à une busette en forme de lame.

L'utilisation de jets libres dans ces procédés engendre un autre problème : celui des battements de la lame liquide dus aux variations de niveau de métal dans le répartiteur. Ces battements peuvent être amortis voire supprimés grâce au guidage électromagnétique. Quant aux éventuelles perturbations de la surface de la lame dues aux instabilités locales provoquées par la différence de sa vitesse et de celle de l'air ambiant, elles peuvent être amorties par l'utilisation de champs magnétiques alternatifs.

II.1.3 - Remarques sur le formage électromagnétique

En l'absence de forces électromagnétiques, la forme de la section transversale des jets s'écoulant librement sous l'effet de leur inertie ou de la gravité est déterminée par la géométrie de la busette dont ils sont issus, modifiée par les effets de la tension superficielle. Ceci est clairement illustré par la forme en fuseaux successifs et perpendiculaires entre eux, adoptée par un jet issu d'un orifice légèrement elliptique (Rayleigh (62)). En présence d'un champ magnétique alternatif la forme d'un jet de métal liquide est liée à la géométrie du champ, comme la géométrie de la surface d'un plasma à celle de son champ magnétique de confinement. Toutefois, cette analogie est loin d'être complète. D'abord, la surface d'un plasma ne présente pas de tension superficielle. Ensuite, la durée de vie d'un plasma est de quelques microsecondes. Le plasma étant confiné dans un tore (tokamaks), la géométrie de sa section transversale est considérée comme bidimensionnelle si le rapport d'aspect du tore est grand. Les conditions de bidimensionnalité de la géométrie de la section déformée d'un jet de métal liquide seront établies au paragraphe II.2.1.

Malgré ces différences, les techniques utilisées pour le calcul des formes de plasmas confinés (Fried (27), Grad (39), Shercliff (67)) ont pu être fructueusement appliquées au formage électromagnétique de jet de métaux liquides (Shercliff (70)). Un exemple de calcul sera présenté au paragraphe II.2.2.

Ces calculs, déterminant la forme d'équilibre d'un jet placé dans un champ magnétique dont la géométrie est connue en l'absence de métal, répondent au *problème direct* (Garnier (30)). Le problème, dit *inverse* est celui que se pose un éventuel utilisateur de formage électromagnétique : la géométrie désirée du jet métallique est connue tandis que l'inducteur nécessaire à son obtention est à déterminer. La réponse à ce problème n'est pas univoque. La multiplicité des solutions est illustrée au paragraphe II.3.3 traitant du formage électromagnétique d'un jet, initialement cylindrique, en lame. Le choix final de l'inducteur est fixé par des conditions technologiques de réalisation et d'utilisation.

Une étude délection électromagnétique de lame liquide est présentée au § II.4, tandis que son impact sur un substrat en mouvement fait l'objet du § II.5.

II.2 - CALCULS

La modélisation du formage électromagnétique exposée au § II.2.2. permet la détermination d'une section transversale de jet métallique soumise aux effets des forces électromagnétiques et de la tension superficielle. Le paramètre caractéristique du formage électromagnétique K est (§ I.2.2)

$$K = 2\gamma\mu / B_0^2 L$$

Le calcul présenté au §II.2.2 s'appuie sur les hypothèses de la magnétostatique (§I.2.2.) et de bidimensionnalité qui va être examiné ci-après.

II.2.1 - Hypothèses de calcul

Magnétostatique

Cette hypothèse est justifiée au § I.2.2. Elle signifie que dans le cas de petites épaisseurs de peau électromagnétique, le terme inertiel de l'équation de Bernoulli est très faible devant le terme électromagnétique ou bien :

$$U_0 \ll B_0 / \sqrt{\mu\rho}$$

où U_0 est la grandeur caractéristique du mouvement de brassage électromagnétique.

Bidimensionnalité

Un calcul tridimensionnel du problème couplé de la géométrie de la surface du domaine électroconducteur et du champ magnétique est possible mais nécessite un temps de calcul et une mobilisation de mémoire d'ordinateur considérables voire rédhibitoires. C'est pour cela que la possibilité de traiter ce problème dans un plan (hypothèse d'axisymétrie ou de bidimensionnalité) doit être exploitée chaque fois que cela peut se faire.

Une illustration d'un problème de lévitation électromagnétique axisymétrique est présentée au paragraphe III.1. L'hypothèse de bidimensionnalité d'un jet animé d'une vitesse V_0 va être examinée ci-après par un calcul d'ordre de grandeur et la description d'une expérience menée sur un jet de mercure issu d'un orifice circulaire.

L'hypothèse de la magnétostatique stipule que le mouvement intérieur au domaine liquide n'influence pas la forme de la surface à déterminer. L'hypothèse de bidimensionnalité suppose que la forme de la section transversale est indépendante de la vitesse axiale du jet.

Certaines configurations où l'inducteur et le jet ont une longueur voisine se prêtent évidemment très bien à cette approximation. D'autres où une tranche de jet ne séjourne que quelques millièmes de secondes dans le champ magnétique nécessitent une analyse complémentaire.

Calcul d'ordre de grandeur

Ce calcul détermine la hauteur minimale du champ magnétique que doit traverser une tranche de jet afin que l'effet électromagnétique soit achevé.

Le mouvement d'une particule fluide appartenant au jet est projeté

- sur la verticale :

$$\Delta z = gt^2/2 + V_0 t$$

où V_0 est la vitesse du jet lors de son entrée dans le champ magnétique.

- sur l'horizontale :

$$\Delta x = \gamma_x t^2/2$$

où γ_x est l'accélération correspondant aux effets de la force électromagnétique :

$$\gamma_x = B_0^2 / \mu \rho R_0$$

où R_0 est le rayon du jet cylindrique, B_0 une grandeur caractéristique du champ magnétique.

Lors du formage électromagnétique une particule appartenant à la surface du jet subit un déplacement horizontal de l'ordre du rayon R_0 du jet. Si le déplacement vertical du à la pesanteur est négligeable devant celui du à l'inertie, la hauteur Δz parcourue par une tranche de jet au cours de son formage électromagnétique est :

$$\Delta z \approx R_0 V_0 / U_A \quad \text{où } U_A = R_0 / \sqrt{\mu \rho}$$

Ainsi un jet métallique de densité $\rho = 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$, animé d'une vitesse $V_0 = 2 \text{ m.s}^{-1}$, circulant dans un champ magnétique d'intensité 1000 Gauss doit parcourir dans ce champ une hauteur minimale telle que :

$$\Delta z \approx 2,24 R_0$$

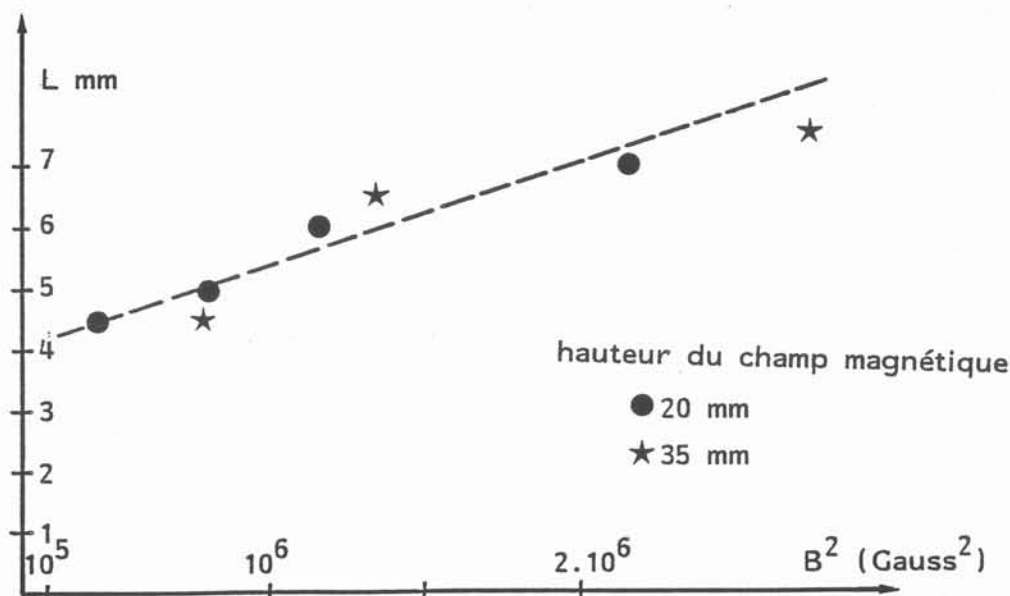
pour que l'effet de formage électromagnétique soit complet.

Lorsque la vitesse du jet est suffisamment élevée, le formage a lieu en dehors du champ magnétique ce qui est utile lors de la solidification, quand par exemple, cette dernière se fait sur un substrat refroidi.

Expériences

Des expériences ont été réalisées sur un jet de mercure de section circulaire $\phi = 3 \text{ mm}$ s'écoulant à une vitesse de $2,3 \text{ m.s}^{-1}$ dans un champ magnétique uniforme.

Deux inducteurs sont testés créant des champs magnétiques de hauteurs respectives 35 et 20 mm. La fréquence du courant inducteur circulant dans les bobines est d'environ 280 kHz. Des photos sont prises pour différentes intensités du courant inducteur, I , mesuré grâce à un oscilloscope. Les largeurs L maximales d'étirement du jet de mercure suivant les lignes de champ sont mesurées sur les photos. Elles sont reportées en fonction du carré du champ magnétique sur la figure suivante :



Ceci prouve que le formage électromagnétique est achevé lorsque le champ magnétique occupe une région de 20 mm de hauteur. Cette indication est précieuse pour la construction des futurs inducteurs.

Ces expériences appellent 3 commentaires :

1) Elles ne valident pas le calcul d'ordre de grandeur précédent. En effet, pour les conditions expérimentales, la hauteur utile de champ issue du calcul précédent est :

$$\Delta z \approx 5 \text{ mm}$$

Or, le champ magnétique est créé par deux inducteurs du type bobines de Helmholtz dont le mode de construction, un tuyau de cuivre de 3/4 mm est enroulé sur un mandrin, ne permet pas d'atteindre une valeur aussi faible de Δz .

2) Le champ magnétique B_0 créé par ces inducteurs est relié à l'intensité du courant électrique I circulant dans l'inducteur par la formule suivante (Annequin-Boutigny(2)) :

$$B_0 = 2 \mu n I / \Phi_c (5/4)^{-3/2}$$

où Φ_c est le diamètre des bobines et n le nombre de spires de chaque bobine.

Nous avons établi au § 1.2.2, l'équation de Bernoulli établissant la saut de pression à une interface soumise aux forces électromagnétiques et de tension superficielle. Sous sa forme adimensionnalisée, elle s'écrit :

$$K \mathcal{H}^* + B_s^{*2} = \text{Cte}$$

Cette équation appliquée entre un point d'arrêt du champ magnétique où la courbure est assimilée à un arc de cercle de rayon e , l'épaisseur de la lame liquide, supposée constante, et un point de courbure nul établit la relation suivante :

$$e \propto \mu \gamma / B_0^2 \quad \text{ou bien} \quad L \propto B_0^2 / \mu \gamma$$

C'est pourquoi L , la largeur de la lame formée, est portée en fonction de B_0^2 sur le schéma ci-dessus.

3) Le fait que la droite expérimentale ne coupe pas l'axe $B^2 = 0$ en $L = 3 \text{ mm}$ n'est pas étonnant puisque l'épaisseur de peau électromagnétique correspondant à une fréquence de 280 kHz est

$$\delta_m = 1 \text{ mm}$$

grandeur comparable à l'épaisseur de la lame formée. Ceci engendre une perte d'effet électromagnétique (§ II.3.3), et par suite diminue le coefficient de proportionnalité entre L et B_0^2 et donc redresse la droite expérimentale.

||.2.2 Formage d'une lame métallique liquide. Calculs et expériences.

*Shaping of a ribbon of liquid metal.
Computations and experiments.*

par

J. P. BRANCHER *, **J. ETAY **** et **O. SERO-GUILLAUME ***

RÉSUMÉ. — Une colonne de métal liquide, placée dans un champ magnétique alternatif de fréquence élevée et uniforme à l'infini, s'étire dans le sens des lignes de champs. La forme de la section droite de la lame réalise le minimum d'une fonctionnelle faisant intervenir l'énergie de la tension superficielle et l'énergie magnétique. La méthode variationnelle utilisée est simple et conduit à un problème de minimisation d'une fonction convexe de plusieurs variables réelles. Les résultats sont comparés aux résultats d'expériences effectuées sur du mercure.

ABSTRACT. — A molten liquid column, placed in a magnetic field which is uniform at infinity, stretches itself along the field lines. The shape of the cross-section realizes the minimum of a functional in which the energy due to the surface tension and the magnetic energy appear. The variational method used is simple and involves the minimization of a convex function of several real variables. The results obtained are compared with some experimental results achieved with mercury.

1. Introduction

Le contrôle de la forme de la section d'une colonne de métal liquide, initialement circulaire, est possible grâce à l'emploi d'un champ magnétique alternatif de géométrie, fréquence et intensité appropriées. Ce procédé de formage sans paroi a été décrit en [1] et [2]. Son application en métallurgie, à la coulée continue, doit permettre un gain d'énergie par suppression d'un certain nombre de passages du métal en laminoir et une maintenance d'installation plus aisée qu'actuellement. Son principe est le même que celui utilisé pour la lévitation électromagnétique [3].

Une induction magnétique possédant une fréquence élevée pénètre peu un milieu électroconducteur. Les courants de Foucault induits dans ce dernier se répartissent à sa surface. La composition de ces courants et de l'induction magnétique engendre une distribution de contraintes normales à la surface du métal. Cette pression magnétique concurrence la tension superficielle pour former la section droite d'un jet de métal liquide.

* L.E.M.T.A., 2, rue de la Citadelle, B.P. n° 850, 54011 Nancy Cedex.

** GIS MADYLAM I.M.G., B.P. n° 68, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex.

C'est un problème à frontière libre qui se pose, analogue à celui de la recherche de la configuration d'équilibre d'un ferrofluide placé dans un champ magnétique constant dans le temps [4]. Un calcul de forme a déjà été fait dans [2] par Shercliff, par résolution des équations locales d'équilibre. Cette résolution introduit un paramètre difficilement accessible expérimentalement.

Nous nous proposons dans une première partie de poser le problème, en terme de minimisation d'énergie avec contrainte (l'aire de la section droite est constante). Puis, par une transformation conforme, on se ramènera à un problème de minimisation d'une fonction de plusieurs variables réelles avec contraintes, comme dans [3]. Les résultats seront fournis par une résolution numérique puis seront comparés avec des résultats obtenus sur des expériences faites avec du mercure.

Ce procédé de fabrication de lames métalliques sans l'intervention de paroi trouve son plein intérêt dans le cadre de l'élaboration de rubans de matériaux amorphes ou microcristallisés. Outre l'intérêt que présente la suppression de la pollution du métal fondu par le réfractaire de la base de sortie du creuset, l'effet stabilisant du champ magnétique [5] sur les perturbations orthogonales à la surface libre est favorable à l'amorphisation.

2. Position du problème

Soit un jet cylindrique vertical pénétrant dans une région d'induction magnétique uniforme (fig. 1), de valeur efficace B_0 ; sa section droite Ω_1 , de frontière $\partial\Omega_1$, se détermine par le problème magnétostatique suivant :

Trouver Ω_1 , tel que si Ω_2 est le domaine extérieur à Ω_1 dans R^2 , l'énergie :

$$E = \nu L - \frac{1}{2\mu} \left(\int_{\Omega_2} (B^2 - B_0^2) dx dy - 2 \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi}{\partial n} \varphi dl \right),$$

soit minimale avec la contrainte exprimant l'invariance de l'aire de la surface formée, soit :

$$\int_{\Omega_1} dx dy = \text{constante}.$$

Les notations sont les suivantes : ν , la tension superficielle; L , la longueur de $\partial\Omega_1$; μ , la perméabilité magnétique du vide; Γ_m , le cercle de rayon R_m avec $R_m \rightarrow \infty$ quand $m \rightarrow \infty$; dl , l'élément de longueur de Γ_m ; ψ , le potentiel de l'induction appliquée ($\psi = B_0 x$, si B_0 est parallèle à Ox); n : la normale extérieure à Ω_2 sur $\partial\Omega_1$.

La valeur efficace de l'induction magnétique totale B est un champ irrotationnel, dont le potentiel φ satisfait, d'après les équations de Maxwell, à :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1, \\ B = \text{grad } \varphi \xrightarrow{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} B_0 = \text{grad } \psi. \end{array} \right.$$

$\varphi = \psi$ est le potentiel de la perturbation de l'induction.

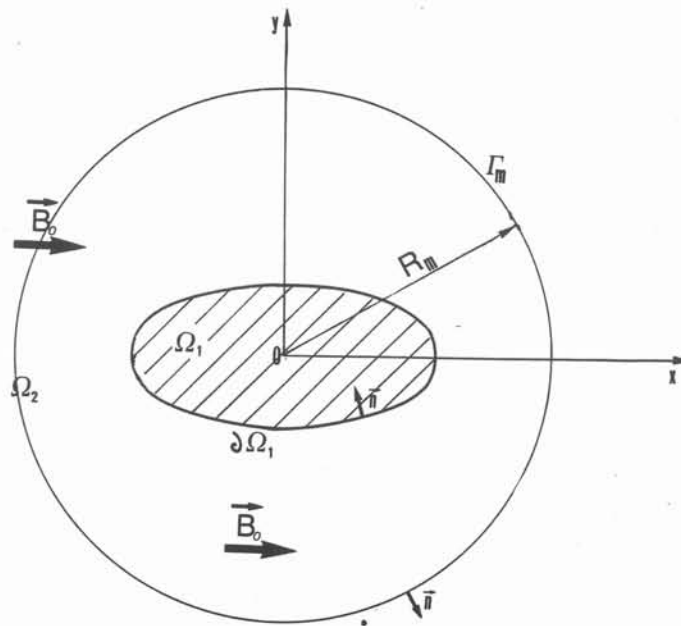


Fig. 1. — Définition et notations.

Fig. 1. — Definition and notation.

L'induction est nulle dans Ω_1 , le mouvement induit dans le métal liquide est négligé [3].

Le premier terme de l'énergie vL est classique, sa variation première donne le saut de pression v/R où R est le rayon de courbure de l'interface $\partial\Omega_1$.

Les deux derniers termes de E représentent la contribution de l'énergie magnétique. Leur variation première introduit le terme de pression magnétique $B^2/2\mu$. Pour cela, définissons $\delta\eta(x, y)$, un champ de déformations virtuelles du disque Ω_m , de rayon R_m , avec les conditions $\delta\eta=0$ sur Γ_m et $\int_{\partial\Omega_1} \delta\eta \cdot n \, dl = 0$ (conservation de la surface de Ω_1).

Soit $A_m = \int_{\Omega_m} (B^2 - B_0^2) \, dx \, dy$; sa variation première donne, puisque B_0 est constant ainsi que la surface du disque Ω_m :

$$\delta A_m = + \int_{\Omega_1} B^2 \delta\eta \cdot n \, dl + 2 \int_{\Omega_m - \Omega_1} B \delta B \, dx \, dy,$$

après application de la formule de Green (φ et $\partial\varphi$ sont harmoniques) :

$$\int_{\Omega_m - \Omega_1} B \cdot \delta B = \int_{\Omega_m - \Omega_1} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \delta\varphi = \int_{\Omega_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \delta\varphi \, dl + \int_{\Gamma_m} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \delta\varphi \, dl.$$

Comme sur $\partial\Omega_1$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0, \quad \int_{\Omega_m-\Omega_1} \mathbf{B} \delta \mathbf{B} = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \delta\varphi \, dl.$$

Le problème (1) est analogue à celui d'un écoulement irrotationnel autour d'un obstacle borné. Le potentiel complexe de la perturbation admet loin de l'obstacle, le développement :

$$g(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{n=2}^{-\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}, \quad z = x + iy,$$

on obtient donc :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta A_m = + \int_{\Omega_1} B^2 \delta \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} \, dl + 2 \lim_{m \rightarrow +\infty} \delta \int_{\Gamma_m} \frac{\partial\psi}{\partial n} \varphi \, dl.$$

Dans cette expression, le premier terme exprime le travail de la pression magnétique dans le déplacement virtuel $\delta \boldsymbol{\eta}$, le deuxième est éliminé par définition de la fonctionnelle d'énergie.

Une étude dimensionnelle rapide conduit à définir le potentiel réduit :

$$E^* = \frac{2\mu\nu}{B_0^2 L_0} L - \int_{\Omega_2} (B^2 - 1) \, dx \, dy + 2 \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial\psi}{\partial n} \varphi \, dl,$$

où L_0 est la longueur caractéristique telle que :

$$\Pi L_0^2 = \int_{\Omega_1} dx \, dy;$$

on a remplacé \mathbf{B} par \mathbf{B}/B_0 , x et y par x/L_0 et y/L_0 , et L par L/L_0 .

Le dernier terme de l'énergie E^* peut s'écrire :

$$2 \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial\psi}{\partial n} \varphi \, dl = 2 \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_m} a_{-1} \frac{\cos^2 \theta}{R_m} \, dl = 2 \Pi a_{-1}.$$

Ω_2 n'étant pas borné, le deuxième terme de E^* est la différence de 2 intégrales divergentes. Il n'est donc pas utilisable dans la forme sous laquelle il est écrit.

En introduisant l'induction de perturbation $\mathbf{b} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$, on obtient après utilisation de la formule de Green :

$$\int_{\Omega_m-\Omega_1} (B^2 - 1) \, dx \, dy = \int_{\Omega_m-\Omega_1} b^2 \, dx \, dy + 2 \int_{\partial\Omega_1} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, dl + 2 \int_{\Gamma_m} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, dl;$$

comme sur $\partial\Omega_1$, $\partial\varphi/\partial n = -\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = -\partial\psi/\partial n = \partial\psi/\partial n'$ ($\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$), on peut écrire :

$$\int_{\partial\Omega_1} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dl = \int_{\partial\Omega_1} \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dl = \int_{\Omega_1} |\mathbf{grad} \psi|^2 dx dy = \Pi.$$

D'autre part :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_m} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dl = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_m} -a_{-i} \frac{\cos^2 \theta}{R_m} dl = -\Pi a_{-1}.$$

On obtient donc E^* , sous la forme :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E^* = k L - \int_{\Omega_2} b^2 dx dy + 4 \Pi a_{-1}, \\ k = \frac{2 \mu v}{B_0^2 L_0}. \end{array} \right.$$

Ce résultat généralise celui obtenu dans [3] où les courants inducteurs étaient placés à distance finie $a_{-1} = 0$.

3. Étude du problème

On utilise une transformation conforme :

$$z(\zeta) = C_0 \zeta + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n}{\zeta^n},$$

dont l'inverse transforme le domaine Ω_2 , en l'extérieur du cercle de centre O et de rayon 1. On définit la frontière $\partial\Omega_1$ par la représentation paramétrique :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(\theta) = C_0 \cos \theta + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos n\theta, \\ Y(\theta) = C_0 \sin \theta - \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin n\theta. \end{array} \right.$$

Or $\partial\Omega_1$ est symétrique par rapport à Ox et Oy, les coefficients C_n sont donc réels et les C_{2p} sont nuls dès que p est supérieur à 1.

Dans le plan image (plan des ζ), le potentiel \tilde{f} de l'induction magnétique \mathbf{B} s'écrit :

$$\tilde{f}(\zeta) = C_0 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right);$$

celui de b a donc comme expression :

$$g(z) = f(z) - z = \tilde{f}(\zeta) - z(\zeta) = \frac{C_0 - C_1}{\zeta} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{C_n}{\zeta^n}.$$

L'expression de l'énergie magnétique est inchangée dans le plan image :

$$\int_{\Omega_2} b^2 dx dy = \int_{|\zeta| > 1} \left| \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right|^2 d\sigma d\tau \quad \text{avec} \quad \zeta = \sigma + i\tau.$$

Un calcul très simple conduit à :

$$\int_{|\zeta| > 1} \left| \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right|^2 d\sigma d\tau = \Pi \left(C_0^2 - 2C_0 C_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n^2 \right).$$

La conservation de l'aire de Ω_1 , s'écrit :

$$\Pi = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\partial\Omega_1} \bar{z} dz = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{|\zeta|=1} \overline{z(\zeta)} \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta = \left(C_0^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n^2 \right) \Pi.$$

La contrainte sur les C_n est donc :

$$(4) \quad C_0^2 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n^2.$$

En utilisant cette contrainte, on trouve :

$$(5) \quad \int_{\Omega_2} b^2 dx dy = 2 \Pi C_0 (C_0 - C_1).$$

On constate que l'énergie magnétique créée par les courants de Foucault répartis sur $\partial\Omega_1$ ne dépend que des deux premiers coefficients C_0 et C_1 . Par définition :

$$a_{-1} = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} zg(z),$$

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} zg(z) = \lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} z(\zeta) \tilde{g}(\zeta),$$

on vérifie immédiatement que :

$$a_{-1} = C_0 (C_0 - C_1).$$

Le calcul de L se fait comme dans [3] :

$$L = \int_{\partial\Omega_1} |dz| = \int_{|\zeta|=1} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| |d\zeta|,$$

soit :

$$r^2(\zeta) = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad \text{avec} \quad r(\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n \zeta^{-n},$$

alors :

$$(6) \quad L = 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} r_n^2.$$

La définition de $r(\zeta)$ donne la relation de récurrence :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0 = \sqrt{C_0}, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_0}}, \quad r_3 = -\frac{C_3}{\sqrt{C_0}} = 0, \\ \text{et} \\ \forall n \geq 4, \quad r_n = -\frac{1}{2\sqrt{C_0}} \left((n-1)C_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} r_k r_{n-k} \right). \end{array} \right.$$

Finalement, le problème approché est le suivant :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } C_0, C_1, C_3 \dots C_{2N+1}, \text{ tels que :} \\ E^* = E^*(C_0, C_1 \dots C_{2N+1}) = kL(C_0, C_1 \dots C_{2N+1}) + 2\pi C_0(C_0 - C_1) \\ \text{soit minimal, où } L(C_0, C_1 \dots C_{2N+1}) \text{ est calculé par (6) et (7), avec :} \\ C_0^2 = 1 + \sum_{p=0}^N (2p+1) C_{2p+1}^2. \end{array} \right.$$

4. Résultats

4.1. Résultats numériques

La méthode utilisée est la méthode du gradient avec relaxation. La contrainte bilatérale portant sur la conservation de l'aire de la section droite a été éliminée en posant :

$$C_0 = \sqrt{1 + \sum_{p=0}^N (2p+1) C_{2p+1}^2}.$$

Les calculs ont été faits sur le SEMS-SOLAR 16-40 de l'E.N.S.E.M., avec $N=10$. Le test de sortie portait sur la différence de deux énergies consécutives, l'erreur relative ayant été fixée à $2 \cdot 10^{-5}$.

Les résultats obtenus se trouvent dans les figures 2, 3, 4, 5, 6.

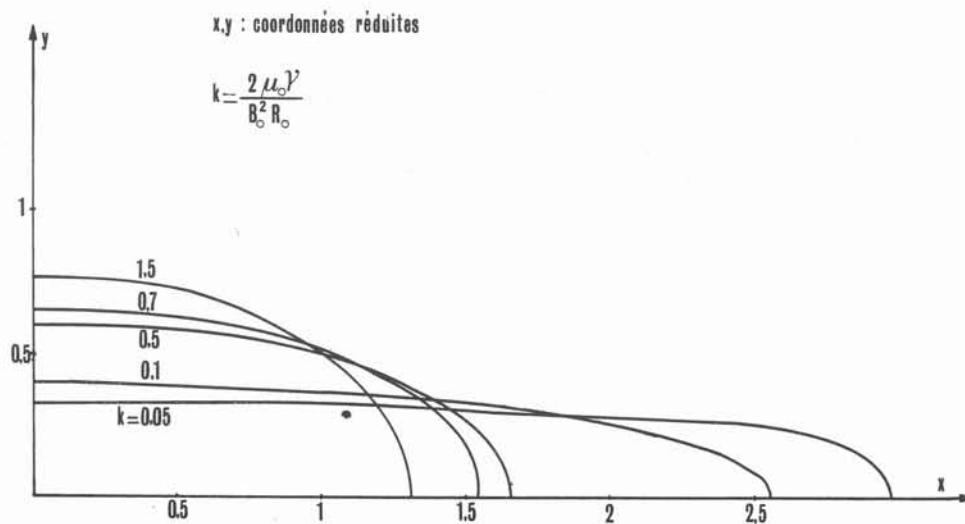
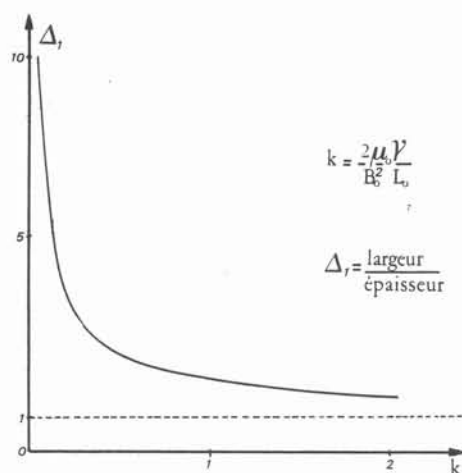
Fig. 2. — Formes de la section droite du jet pour différentes valeurs de k .Fig. 2. — Shapes of the cross-section of the jet for different values of k .

Fig. 3

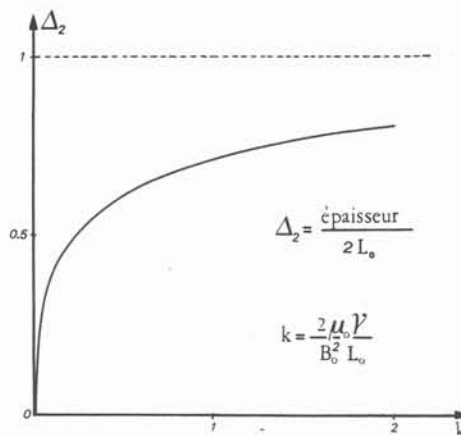
Fig. 3. — Rapport de la largeur de la lame et de l'épaisseur pour différentes valeurs de k .Fig. 3. — Ratio of the width of the ribbon over the thickness for different values of k .

Fig. 4

Fig. 4. — Épaisseur réduite de la lame en fonction de k .Fig. 4. — Thickness of the ribbon versus k .

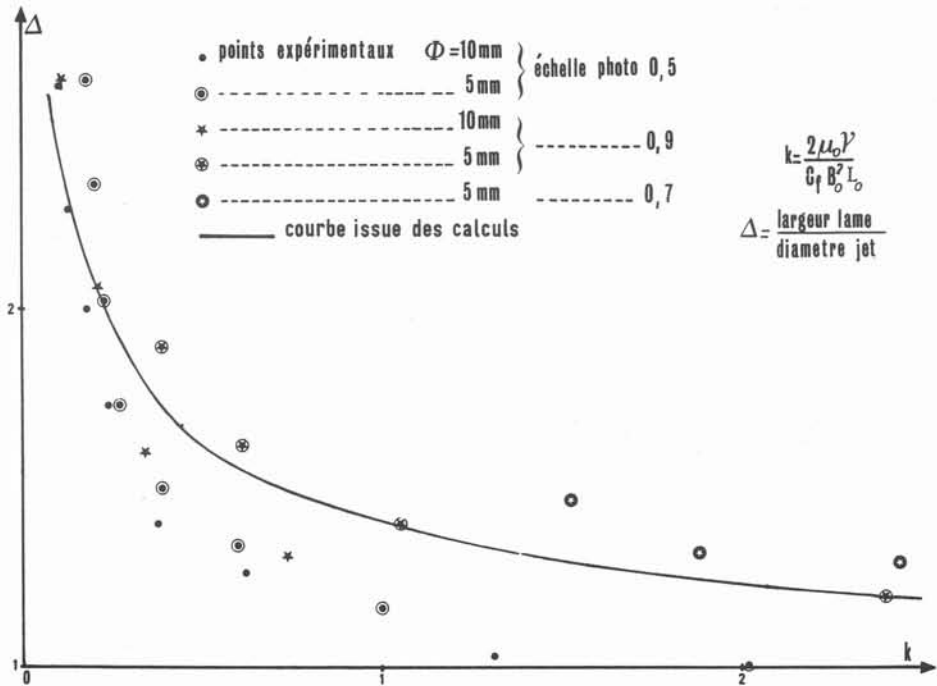


Fig. 5. — Largeur réduite de la lame en fonction de k .
Fig. 5. — Width of the ribbon versus k .

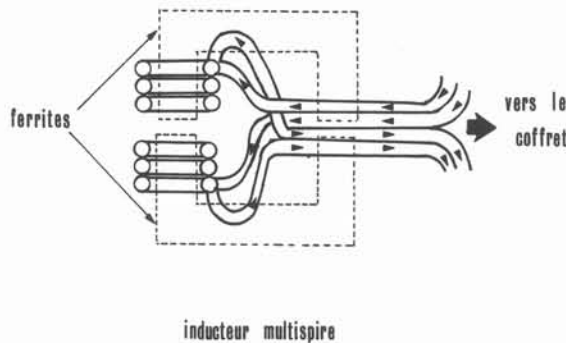


Fig. 6. — Schéma de l'inducteur de formage de lame.
Fig. 6. — Sketch of the inductor used to shape ribbons.

4.2. Résultats expérimentaux

Les expériences ont été réalisées [1] sur une boucle hydraulique contenant du mercure. L'orifice d'entrée du mercure dans la veine expérimentale est circulaire de diamètre \varnothing égal à 10 ou 5 mm. Le mercure coule librement sous l'effet de la gravité dans la veine expérimentale, où un inducteur, formé de 2 bobines de 3 spires chacune, à l'intérieur

desquelles sont placées des ferrites refroidies (fig. 6), crée un champ magnétique qui, l'effet de culasse magnétique des ferrites aidant, peut être considéré comme uniforme en l'absence de mercure. L'inducteur associé à des condensateurs forme un circuit oscillant. La fréquence du courant circulant dans l'inducteur est de 380 kHz, soit une épaisseur de pénétration du champ magnétique dans le mercure :

$\delta = 0,8$ mm, appelée aussi épaisseur de peau électromagnétique. L'intensité efficace B du champ magnétique, en l'absence de mercure, entre les deux bobines peut atteindre 620 Gs.

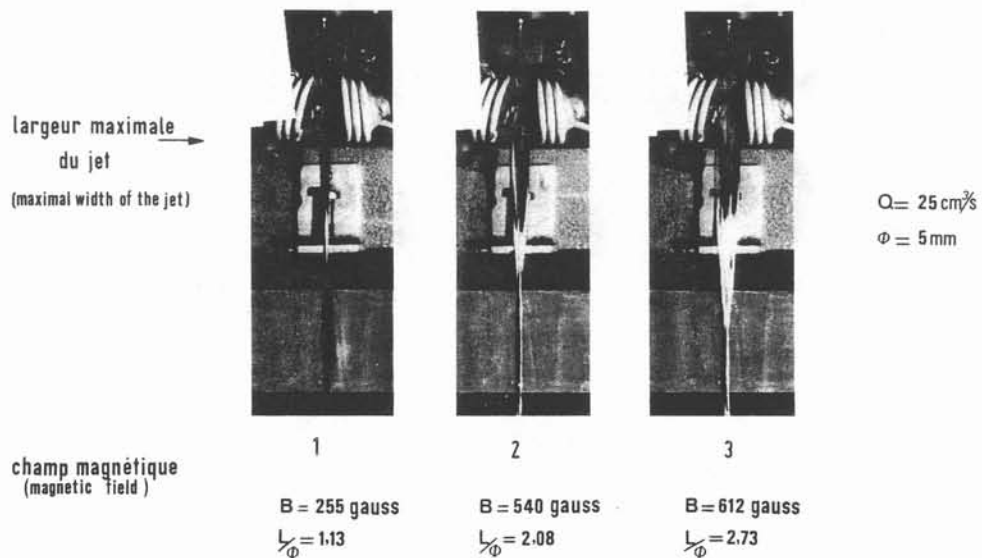
Lorsque la fréquence du champ magnétique est infinie la force de Lorentz se réduit à un terme de pression $B^2/2\mu$. Avec une fréquence finie, ce terme de pression peut s'écrire $C_f B^2/2\mu$ où

$$C_f = 1 - \frac{1 - e^{-\sqrt{R_\omega}}}{\sqrt{R_\omega}},$$

avec $R_\omega = \mu\sigma\omega(\varnothing/2)^2$ avec μ la perméabilité magnétique du mercure, σ sa conductivité, ω la pulsation des courants inducteurs. L'introduction du coefficient C_f nous permet de prendre en considération la décroissance rapide de la pression magnétique dans l'épaisseur de peau.

Pour $\varnothing = 5$ mm, C_f vaut 0,77 et pour $\varnothing = 10$ mm C_f vaut 0,89.

Si nous suivons une « tranche de jet », nous constatons qu'elle entre dans le champ magnétique, y subit l'effet des forces de Lorentz mais réagit à leur impulsion en dehors de celui-ci alors qu'elle n'est soumise qu'aux forces dues à la gravité et à la tension superficielle (photo 1, 2, 3).



Le jet adopte alors une forme de fuseaux perpendiculaires les uns aux autres, lorsque la déformation due au champ magnétique est suffisamment faible pour permettre à ce phénomène oscillatoire de s'installer (photo 1). Lorsque l'intensité de l'induction augmente, la longueur et la dissymétrie du premier fuseau croissent. Le deuxième fuseau est alors très instable ou ne peut s'établir (photo 3). Un rapide calcul d'ordre de grandeur, donnant la distance parcourue par une section de fluide durant le temps de son formage de l'ordre de 10 rayons de jet [6], confirme cette vue du phénomène. L'hypothèse de bidimensionnalité utilisée lors des calculs est donc sujette à caution. Nous pouvons néanmoins imaginer que si la colonne de mercure ne coulait pas, la tranche de jet comprise entre les deux bobines inductrices adopterait la forme calculée moyennant la correction de la valeur de la pression magnétique due à la valeur finie de l'épaisseur de peau électromagnétique δ . Or cette tranche de jet est convectée par l'écoulement, mais nous observons sur les photos 1, 2, 3 que pour un même débit à différents champs magnétiques, la zone de largeur maximale de la lame se situe toujours sur les mêmes sections du jet. Nous supposons donc que l'hypothèse de bidimensionnalité est vérifiée pour les sections de largeurs maximales de jet.

Les mesures sont faites sur photographies dont l'échelle peut varier. Les points portés sur la figure 5 sont les moyennes des largeurs, reportées au diamètre, observées pour un même champ magnétique à différents débits. Ces largeurs présentent un écart-type de 10%. Ainsi la forme de la section de plus grande largeur varie peu en fonction du débit, de même que sa localisation, seule la longueur du fuseau change.

4.3. Comparaison des résultats

Nous constatons une bonne adéquation entre les résultats de mesures et les calculs : le point expérimental présentant le plus grand éloignement de la courbe calculée présente une différence relative de 25%. Nous avons introduit un coefficient, C_f , prenant en compte l'épaisseur de peau, la différence entre les points expérimentaux et la courbe calculée provient donc d'un défaut de bidimensionnalité des expériences. Ceci est confirmé par la meilleure adéquation des mesures et des calculs dans la zone de champs forts.

Dans les régions de champs faibles la déformation du jet est petite et difficilement mesurable. Mais il est intéressant de noter que, dans cette région, une approximation du premier ordre ($k \gg 1$) existe et peut être utilisée comme référence (fig. 6).

A l'équilibre, on a :

$$\frac{1}{k} B^2 + \frac{1}{R} = \text{Cte} \quad \text{sur } \partial\Omega_1,$$

où R est le rayon de courbure.

$$\text{Soit } r(\theta) = 1 + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \cos 2n\theta + O(\varepsilon^2) \quad \text{où } \varepsilon = O(1/k).$$

$$B^2 \text{ calculé sur le cercle de rayon 1 donne : } B^2 = 2(1 - \cos 2\theta).$$

Le développement de $1/R$ donne :

$$\frac{1}{R} = 1 + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} (4n^2 - 1) a_{2n} \cos 2n\theta + O(\varepsilon^2).$$

L'identification des termes en ε dans l'équation d'équilibre donne :

$$a_{2n}=0 \quad \text{pour } n>1 \quad \text{et} \quad 3 \varepsilon a_2=2/k.$$

L'équation polaire de Ω_1 est donc :

$$r(\theta)=1+\varepsilon \cos 2 \theta+O(\varepsilon^2).$$

La courbe de la figure 6 a été tracée pour $k=4$ soit $\varepsilon=1/6$.

4.4. Remarque

La minimisation de l'énergie se fait à section constante, or celle-ci varie lorsque le jet pénètre dans la zone d'induction magnétique. Le débit volumique est constant, et l'application du théorème de Bernoulli en une section d'induction magnétique nulle et une section d'induction B_0 , ainsi que l'utilisation de l'équation locale d'équilibre donne la relation :

$$L_0=\frac{R_0}{(1-2 \Pi^2 R_0^3(R_0-r_0) \nu / r_0 \rho q_v^2)^{1/4}},$$

où R_0 est le rayon du jet avec qu'il ne pénètre dans le champ magnétique, r_0 est le rayon de courbure, à l'extrémité de la section ($y=0, \mathbf{B}=0$), q_v est le débit volumique, ρ est la masse volumique.

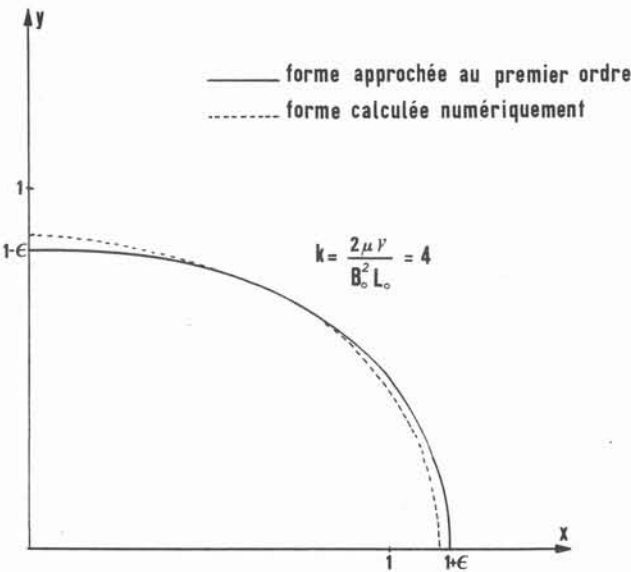


Fig. 7. — Comparaison entre une forme de section approchée au premier ordre et une forme calculée numériquement pour $k=2 \mu \gamma / B_0^2 L_0=4$.
Fig. 7. — Comparison between a shape of cross-section approximated by the first order and a computed shape for $k=2 \mu \gamma / B_0^2 L_0=4$.

Le calcul de L_0 se fait par approximations successives, la variation de L_0 entre deux étapes consécutives modifiant le coefficient k de la fonctionnelle d'énergie. En pratique, les débits sont suffisamment grands pour que $L_0 \sim R_0$. Toutefois un champ magnétique tel que :

$$B \geq \sqrt{\mu\rho} \frac{q_0}{\pi R_0^2},$$

annule le débit du jet. Par exemple un champ d'un ordre de grandeur de 7 000 Gs, annule le débit de $100 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ d'un jet de mercure ($\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\nu = 0,54 \text{ P} \cdot \text{m}$) de rayon 2,5 mm.

5. Conclusion

Les différentes configurations calculées, sont stables. En pratique, elles peuvent être caractérisées par le rapport de la largeur de la lame sur l'épaisseur de la lame, ou bien par le rapport de l'épaisseur sur la longueur.

Les évolutions de ces deux quantités en fonction de k sont données par les courbes des figures 3 et 4.

Théoriquement, pour les faibles épaisseurs, le calcul tombe en défaut. La couche de diffusion de l'induction magnétique peut s'étendre sur toute l'épaisseur de la lame. L'hypothèse de non-pénétration de l'induction dans le métal n'est plus valable. Une bonne coïncidence des résultats d'expériences et de calculs est observée malgré les réserves que l'ont peut émettre quant à la valeur de l'hypothèse de bidimensionalité lors des expériences. Le problème étudié, présente une certaine analogie avec celui d'un jet de fluide magnétique dans un champ uniforme constant et avec celui d'un jet liquide pénétrant dans un écoulement irrotationnel gazeux. Une comparaison qualitative des configurations d'équilibre sans prise en compte de leur stabilité, montrerait que : dans le premier cas, il y a contraction du jet de ferrofluide et allongement de la section dans le sens du champ magnétique appliqué, dans le deuxième cas, il y a une contraction mais un allongement dans la direction orthogonale à la vitesse incidente du gaz.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ETAY J. et GARNIER M., *Sur le contrôle électro-magnétique des surfaces métalliques liquides et ses applications*. (J.M.T.A., vol. 1, n° 6, 1982, p. 911-925).
- [2] SHERCLIFF J. A., *Magnetic Shaping of Molten Metal Columns* (Proc. R. Soc. Lond., A 375, 1981, p. 455-473).
- [3] SNEYD A. D. et MOFFATT H. K., *The fluid Dynamics of the Process of Levitation Melting* (J.F.M., vol. 117, 1982, p. 45-70).
- [4] BRANCHER J. P. et SERO-GUILLAUME O., *Sur l'équilibre des liquides magnétiques, application à la magnétostatique* (J.M.T.A., vol. 2, n° 2, 1983, p. 265-283).
- [5] GARNIER M. et MOREAU R., *Effect of Finite Conductivity on the Inviscid Stability of an Interface Submitted to a High Frequency Magnetic Field* (à paraître au J.F.M.).
- [6] ETAY J., *Le fromage électromagnétique des métaux liquides. Aspects expérimentaux et théoriques* (Thèse Docteur-Ingénieur, U.S.M.G., I.N.P.G., 1982).

(Manuscrit reçu le 4 octobre 1982,
accepté le 24 février 1983)

II.3 - EXPERIENCES DE FORMAGE, GUIDAGE ET COALESCENCE

Avant de décrire la géométrie et les conditions d'optimisation de l'inducteur servant aux expériences (Garnier (29)), nous exposons les effets de la tension superficielle sur l'hydrodynamique d'un jet liquide.

II.3.1 - Instabilité capillaire des jets libres

La tension superficielle n'agit pas de la même façon sur un jet circulaire ou une lame liquide de largeur finie.

* cas d'un jet cylindrique

Plateau a établi qu'un jet liquide cylindrique de rayon R_0 est instable pour toutes les déformations axisymétriques de longueur d'onde λ supérieure au périmètre du jet ($2\pi R$). La perturbation qui croît le plus rapidement, ou mode d'instabilité maximum k_c est indépendante de la valeur de la tension superficielle γ et répond à la relation :

$$k_c * R_0 = 0,697$$

qui correspond à une longueur d'onde l_c

$$l_c = 4,50 \text{ cm}$$

pour un jet de rayon 5 mm.

Le temps t_c de croissance de cette perturbation est tel que :

$$1/t_c = 0.3433 (\gamma/R_0 \rho)^{1/2}$$

soit pour un jet de mercure de 5 mm de diamètre 0,17 seconde.

En négligeant l'accélération due à la gravité, le jet animé d'une vitesse axiale de 2m.s^{-1} est ininterrompu sur une longueur d'une trentaine de centimètres.

* cas d'une lame liquide.

L'action de la tension superficielle sur une lame liquide de largeur finie se traduit par deux effets couplés:

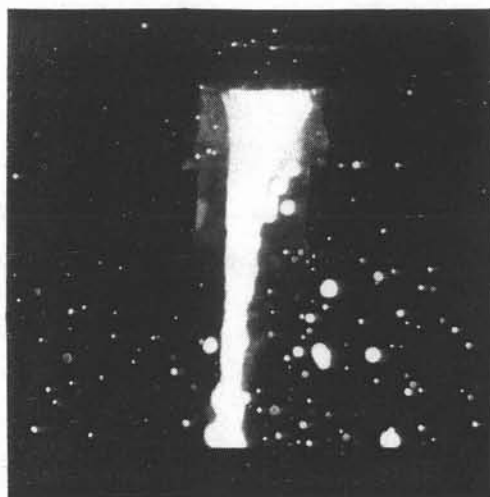
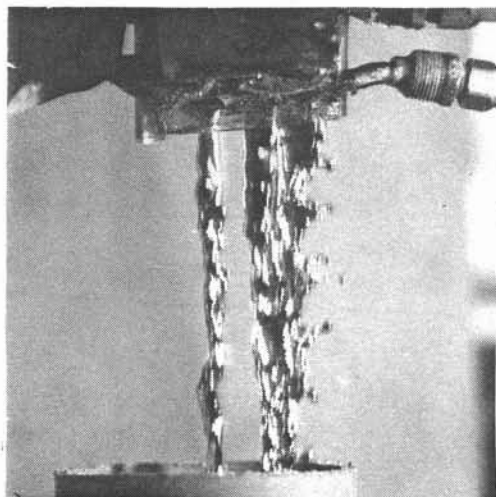
- deux cylindres ou bourrelets se développent aux extrémités de la lame,

- la section transversale de la lame se ramasse sur elle-même. Sa largeur se rétrécit tandis que son épaisseur augmente, jusqu'à ce que les deux bourrelets d'extrémité, dont la section propre a augmenté, se soient rejoints. La longueur correspondant à cette jonction L_{\max} est estimée (46) par la formule :

$$L_{\max} = \left(\frac{\pi \rho e}{\gamma} \right)^{1/2} \frac{1V_0}{8}$$

Ainsi, L_{\max} égale une dizaine de centimètres pour une lame de mercure d'épaisseur 1mm et de largeur 4 cm. Ces effets de bouts seront d'autant moins significatifs que la lame sera large. Afin d'agir sur le jet avant que sa forme ne soit affectée par l'action de la tension

superficielle, l'inducteur est placé près de l'orifice d'amenée du métal liquide dans la veine expérimentale. Un phénomène capillaire nouveau a été observé sur les photos réalisées lors d'expérience de formage.



Comme l'illustrent les photos ci-dessus, (à gauche coalescence de 2 jets de mercure à droite de deux jets d'acier), des gouttelettes sont éjectées ,horizontalement, de la lame formée électromagnétiquement. Ces gouttelettes ont un diamètre moyen inversement proportionnel à la tension superficielle et sont distantes dans l'espace d'une longueur d'onde égale à celle donnée par la formule de Plateau. Ce phénomène n'a pas été étudié plus avant.

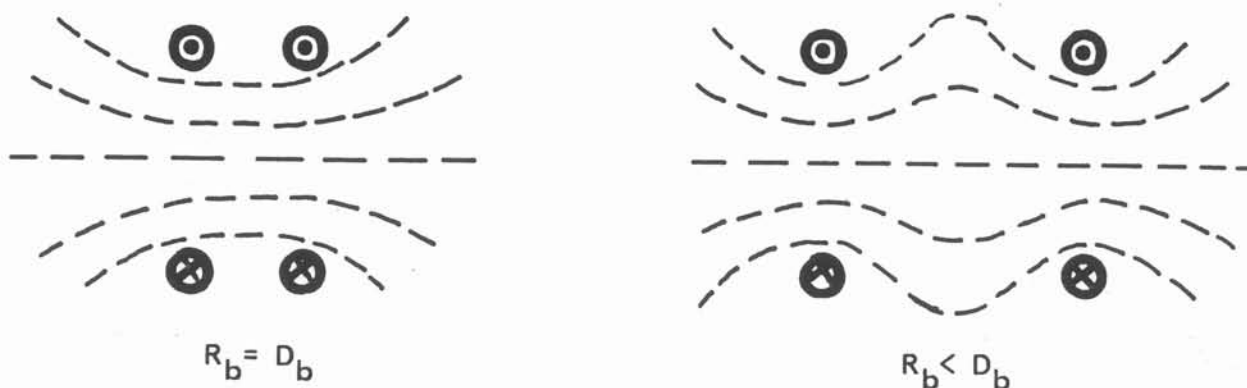
II.3.2 - Description de l'inducteur

Les possibilités offertes par des bobines inductrices du type bobines de Helmholtz, d'allonger la section d'un jet électroconducteur issu d'un orifice circulaire ont été quantifiées au paragraphe II.2.2. Toutefois l'emploi de ce type d'inducteurs pour former une lame de métal liquide présente deux inconvénients majeurs. Ce type d'inducteur ne permet pas de stabiliser la lame formée et son extension à des largeurs de lames compatibles avec un objectif d'application industrielle est difficile voir impossible. En effet:

- * un champ uniforme n'offre aucun "chemin préférentiel" (cf § I.3.4) à l'écoulement du liquide électroconducteur. De plus, son caractère unidirectionnel ne lui permet pas de prétendre à la stabilisation de perturbations dont le vecteur d'onde lui serait perpendiculaire , par exemple, de perturbations nées dans l'injecteur.

- * L'uniformité du champ magnétique créé par des bobines de Helmholtz nécessite l'égalité de la distance inter-bobines D_b et du rayon des bobines R_b . Comme illustré sur le schéma

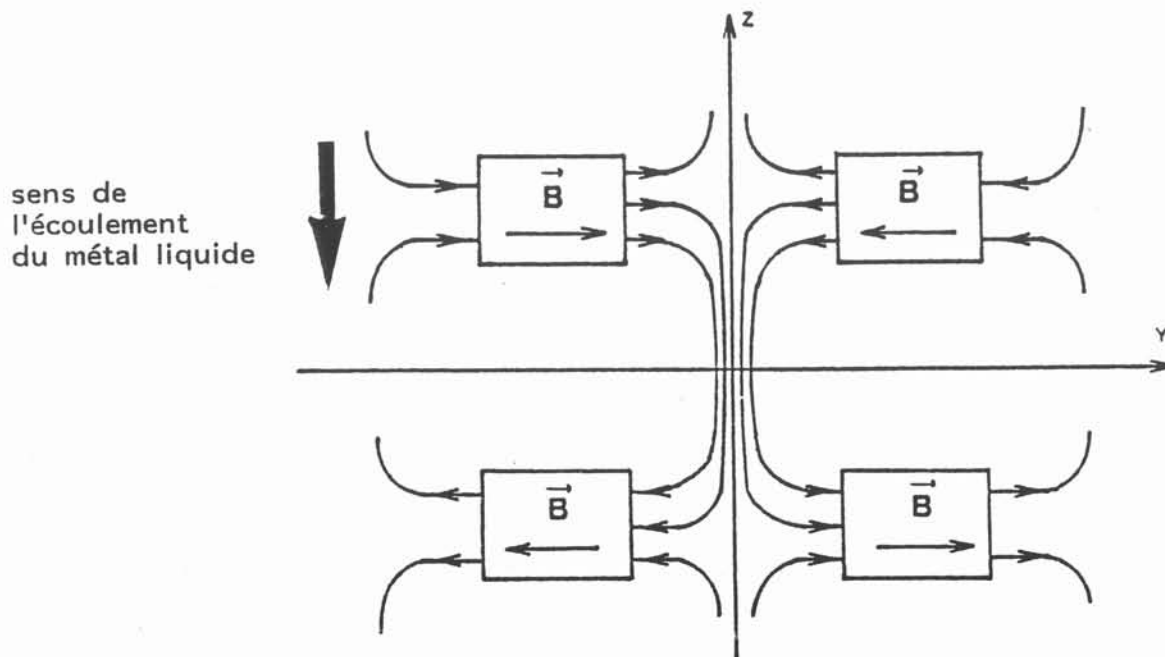
suivant, une augmentation de D_b entraîne une diminution de l'intensité du champ magnétique au centre de l'inducteur.



Or, l'augmentation de D_b et de R_b sous l'égalité $D_b = R_b$ entraîne une dépense énergétique rendant impossible le transfert de ce procédé au stade préindustriel :

- l'augmentation de l'inductance rend difficile l'alimentation de l'inducteur en courant électrique de fréquence élevée,
- la distance $\Delta z = 2 R_b$ parcourue par une tranche de jet dans le champ inducteur devient très supérieure à la distance Δz_{\min} au dessus de laquelle l'effet électromagnétique est achevé. De l'énergie est donc fournie pour l'entretien d'un champ magnétique inopérant.

Pour remédier à ces inconvénients, Deframond (15) a conçu un inducteur modulaire permettant une extension de la largeur de la lame formée. Cet inducteur est schématisé sur la figure suivante.



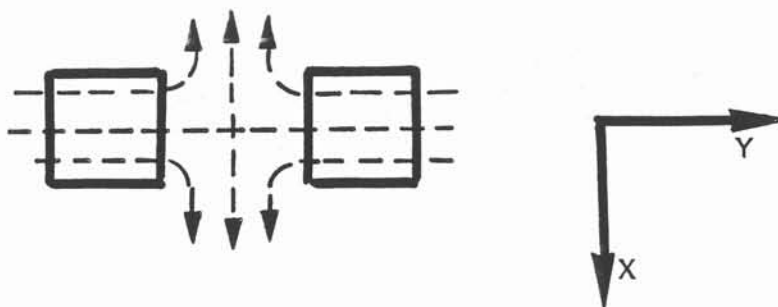
Il est composé de quatre modules (rectangle sur le schéma) créant des champs magnétiques d'intensité égale mais de sens instantanés opposés. D'après Deframond (14) un jet initialement placé dans le plan de symétrie de cet inducteur s'étire sous forme de lame. Son raisonnement est le suivant :

1) au voisinage des modules la composante horizontale B_y du champ magnétique, est supérieure aux composantes B_x et B_z et permet le formage électromagnétique du jet.

2) Plus loin des modules, la composante dominante est B_z , qui est minimum dans le plan de symétrie vertical et, de ce fait, autorise :

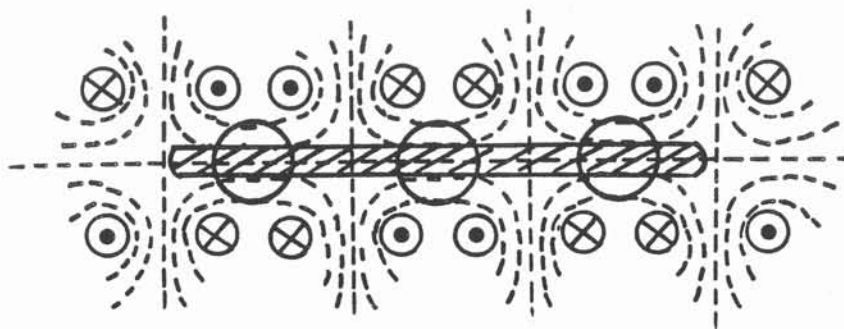
- * un guidage global de la lame,
- * la stabilisation d'éventuelles perturbations de vecteurs d'onde parallèles à l'écoulement.

Bien que la deuxième partie de cette analyse soit juste, nous ne validerons pas ici la première. En effet, dans le plan des modules supérieurs, le champ magnétique a une forme quadripolaire plus ou moins déformée par l'allongement suivant x des modules.



La forme obtenue grâce à cette configuration du champ ne peut être qu'une croix plus ou moins déformée dans une direction privilégiée et non une lame.

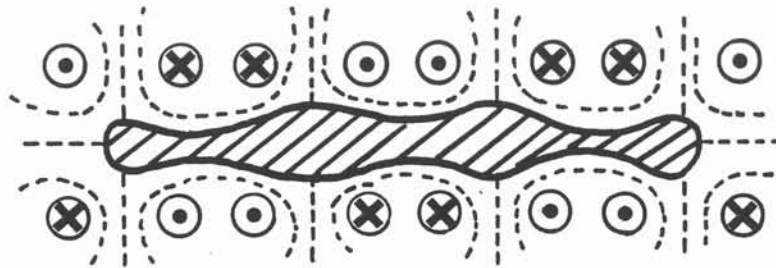
L'idée de Deframond a été reprise et modifiée pour créer un inducteur modulaire donc extensible en largeur présentant un plan de symétrie. Un schéma de la géométrie d'un inducteur à 8 modules est proposée ci-dessous :



Chaque module est un solénoïde. Tous les modules sont semblables. Leur polarité est alternée. Les polarités de deux modules se faisant face sont semblables. La distance entre ces deux modules est supérieure au diamètre du jet. L'entraxe des jets est égal à l'entraxe modulaire et décalé d'un demi-entraxe par rapport à ce dernier. Cette géométrie a été testée sur du mercure (cf § II.3.4). La coalescence de 3 jets de diamètre 8 mm, d'entraxe 18 mm a été réalisée pour une puissance électrique totale consommée de 25 KWatts.

L'inducteur décrit ci-dessus présente deux faiblesses :

- il n'offre pas la forte composante verticale B_z de l'inducteur proposé par Deframond,
- sa section transversale dans le plan de l'axe des modules présente une géométrie semblable à celle appelée "picket fence" en confinement électromagnétique des plasmas (Berkowitz et al (6)). La forme de la surface de la lame obtenue n'a jamais été mesurée. Elle peut donc être proche de celle du schéma suivant.



Solidifiée en cet état, elle engendrera un ruban d'épaisseur variable.

L'adjonction d'un deuxième étage peut donc se révéler nécessaire pour :

- guider la lame formée sur une plus longue distance,
- créer un champ magnétique vertical capable d'amortir les perturbations de vecteur d'onde parallèle au sens de l'écoulement,
- reprendre les éventuelles irrégularités de la surface de la lame engendrées par le formage imparfait du au premier étage.

L'inconvénient majeur de cet ajout est une consommation énergétique accrue. L'optimisation, exposée dans le paragraphe suivant est donc indispensable.

II.3.3 - Optimisation de l'inducteur

Les trois principaux facteurs auxquels est soumise l'optimisation d'un inducteur sont les suivantes :

- géométrie,
- fréquence d'utilisation,
- perte par effet Joule.

Ces facteurs sont d'ailleurs dépendants les uns des autres.

Géométrie

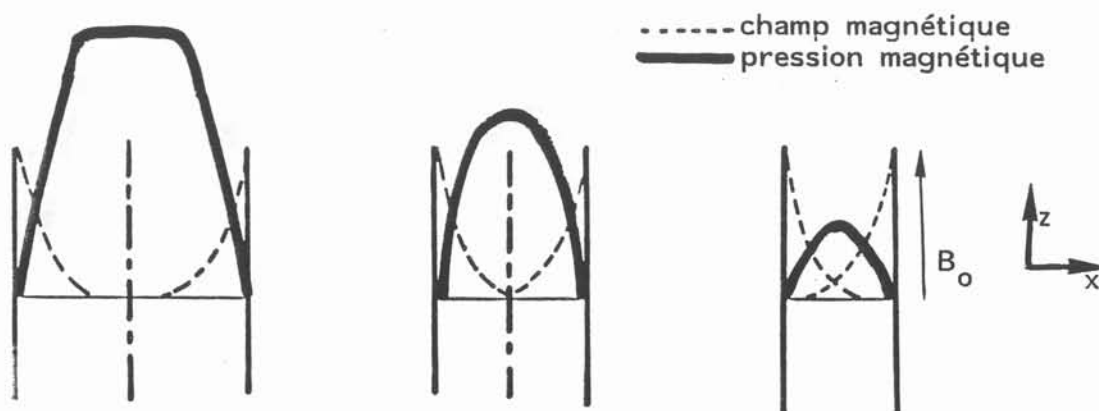
Même si les modules constituant l'inducteur sont tous semblables, des défauts d'assemblage peuvent apparaître entraînant une diminution de la zone active, c'est à dire de la zone où les lignes de champ sont parallèles. Un décalage en bloc de modules est illustré sur le schéma suivant :



Un soin attentif apporté à la construction de l'inducteur doit éliminer les défauts de ce type. Il faut toutefois souligner que l'assemblage des modules requiert méthode et patience.

Fréquence d'utilisation

Le formage électromagnétique de lame se heurte aux limites d'épaisseur imposées par l'existence de la peau électromagnétique. Si, pour une épaisseur de lame recherchée $2a$, l'épaisseur de peau augmente, le saut de pression dû à l'existence des forces électromagnétiques décroît. Ce phénomène est illustré sur le schéma suivant :

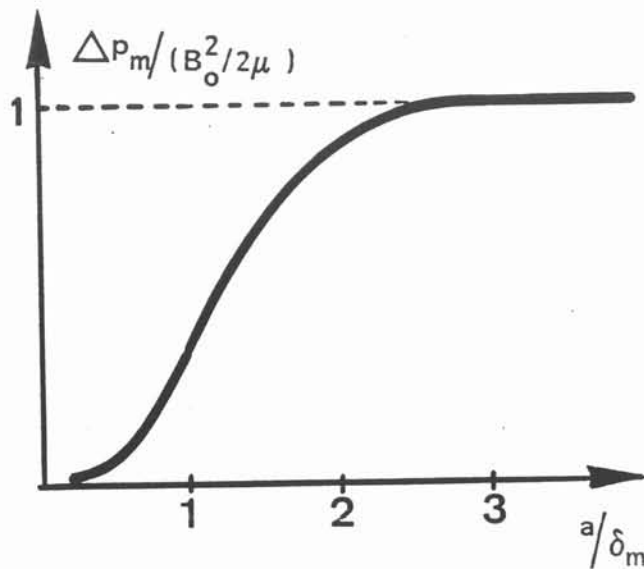


Un champ magnétique uniforme d'intensité efficace B_0 est appliqué à la surface de lame de métal liquide infiniment longue et large. Dans la lame, le champ décroît exponentiellement suivant l'axe des x . Le saut de pression entre la surface de la lame et son milieu est :

$$\Delta p_m = \frac{B_0^2}{2\mu} F(2a/\delta_m)$$

où $F(x) = 2 e^{-x} [\operatorname{ch} x + \cos x - 2]$

La fonction $F(x)$ est représentée sur le graphe suivant :



Deux conclusions peuvent être tirées de ce modèle :

- pour la configuration envisagée, où le champ magnétique inducteur est parallèle à la surface, Δp_m est constant tant que :

$$a \geq 2\delta_m$$

- un ordre de grandeur du champ magnétique à la surface d'une lame formée électromagnétiquement est :

$$B_0 \approx (\mu \gamma / a F(2a/\delta_m))^{1/2}$$

Cet ordre de grandeur est établi en utilisant les remarques du paragraphe II.2.1 concernant la relation liant la largeur de la lame obtenue dans les bobines de Helmholtz un champ magnétique appliqué.

Ainsi, l'obtention d'une lame d'épaisseur $2a$ d'un métal liquide de conductivité électrique donnée σ est soumise à l'emploi de fréquences telles que :

$$f \geq \frac{4}{\mu \sigma a^2 \pi}$$

Une fréquence supérieure à 4 Mhz est nécessaire à l'obtention d'une épaisseur de 1mm d'une lame de métal liquide de conductivité électrique $10^6 (\Omega.m)^{-1}$. Or, la production de tels champs magnétiques est malaisée et cette valeur de fréquence favorise la mise en état de plasma de l'atmosphère de coulée. Cette nuisance peut être évitée par utilisation d'une forte isolation électrique des inducteurs. L'épaisseur de l'isolant, et donc la distance entre l'inducteur et la charge, augmentent, favorisant la décroissance naturelle du champ magnétique dans l'espace. Une fréquence optimale doit donc être choisie qui soit suffisamment élevée pour éviter la perte d'effet électromagnétique due à la pénétration du champ dans le métal mais suffisamment basse pour ne pas nécessiter de trop grandes épaisseurs d'isolant.

C'est pourquoi, nous pensons que l'emploi de champ magnétique alternatif est inadaptée à l'obtention de rubans métalliques d'épaisseur inférieure au millimètre.

Le générateur dont nous disposons permet l'utilisation de fréquences pouvant atteindre 400 kHz, ce qui correspond à une épaisseur de peau électromagnétique, dans le mercure :

$$\delta_m = 0.8 \text{ mm}$$

Dans ces conditions, le champ nécessaire à l'obtention d'une lame d'épaisseur 1mm est 3,5 fois plus élevé que celui nécessaire à l'obtention d'une lame d'épaisseur 3mm.

Pertes par effet Joule

Les pertes par effet Joule ont lieu dans l'inducteur mais aussi, dans la lame liquide. Un ordre de grandeur du réchauffement de la lame liquide provoqué par son passage dans le champ magnétique va être donné, puis les pertes dans l'inducteur seront examinées.

* La puissance Joule moyenne par unité de volume est (§ 1.1.3)

$$\left\langle \frac{J^2}{\sigma} \right\rangle = \frac{|B_s|^2}{\mu^2 \sigma \delta_m} e^{2\xi_3/\delta_m}$$

La puissance moyenne par unité de surface exposée au champ est donc :

$$P_{\text{moy}} = \frac{B^2}{2 \mu^2 \sigma \delta_m}$$

Un bilan thermique établissant l'égalité entre la puissance injectée dans l'inducteur pendant un temps Δt et l'élévation de température ΔT correspondante s'écrit :

$$\frac{B^2}{2 \mu^2 \sigma \delta_m} * \partial \Omega * \Delta t = m c \Delta T$$

où $\partial \Omega$ est la surface de métal exposée au champ magnétique de hauteur Δz

$$\partial \Omega \approx 2 l \Delta z$$

et c la capacité calorifique massique du métal liquide.

Ceci donne une élévation de température :

$$\Delta T = \frac{B^2}{\mu^2 \sigma \delta_m} \frac{1}{\rho c} \frac{\Delta z}{e V}$$

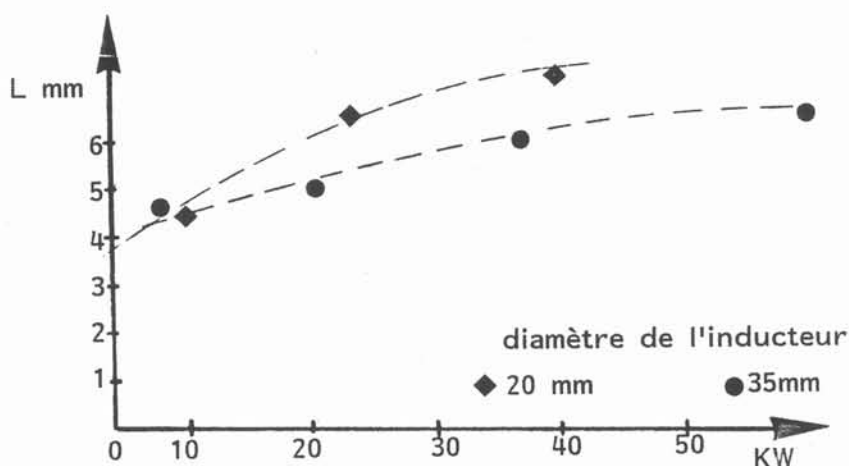
pour une feuille d'épaisseur e , animée d'une vitesse V .

Les valeurs d'intensité du champ magnétique nécessaires au formage d'une lame d'épaisseur 2 mm sont empruntées au tableau du § II.3.4 et reportées dans la formule ci-dessus. Les élévations de température obtenues pour une hauteur de champ de 2 cm et une vitesse de jet de 2 m.s^{-1} sont :

$$\Delta T = 2,7^\circ \text{ K pour du mercure } (C_{\text{Hg}} = 138 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})$$

$$\Delta T = 3,9^\circ \text{ K pour de l'acier } (C_{\text{acier}} = 711 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})$$

La quantification des pertes par effet Joule dans l'inducteur est importante pour l'établissement d'un bon rendement du procédé. Ceci est clairement illustré dans les expériences concernant les bobines de Helmholtz de différents diamètres, rapportées au § II.2.1. Lors de ces expériences, la puissance consommée a été relevée. Les résultats sont portés sur le schéma suivant.



A puissance consommée égale, l'inducteur de petit diamètre est plus efficace que celui de diamètre supérieur. Ceci est attribuable à la plus grande résistance de l'inducteur de diamètre 35 mm.

Un examen de la relation liant la résistance de l'inducteur au courant électrique le parcourant est donc nécessaire. En effet, l'alimentation en courant alternatif est telle que l'intensité du courant électrique circulant dans l'inducteur ne varie pas comme l'inverse de la résistance pour une tension donnée.

Lors de nos expériences, le courant inducteur est obtenu grâce à un générateur Celes de type apériodique pouvant fournir une puissance de 100 kW. Ce générateur a la particularité de fournir l'énergie nécessaire au maintien à la résonance d'un circuit oscillant constitué de l'inducteur et d'un coffret de capacités adaptables.

Ernst (18) donne une analyse détaillée du fonctionnement de ce générateur et établit que, pour une tension continue délivrée par l'alimentation du générateur et pour une fréquence donnée, l'intensité I circulant dans l'inducteur est inversement proportionnelle à la racine carrée de la résistance R de l'inducteur :

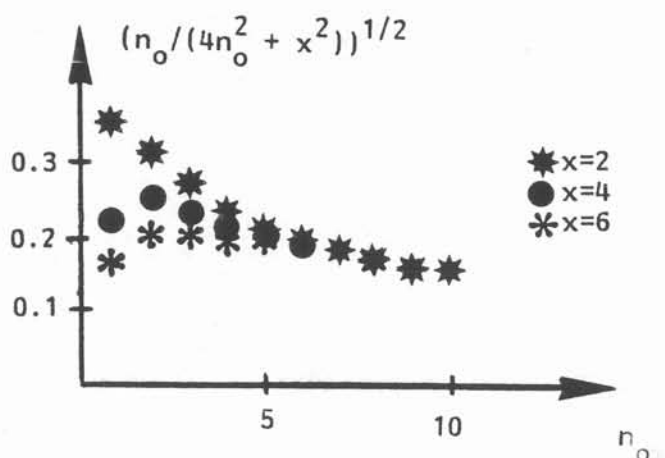
$$I \propto (R)^{-1/2}$$

Ceci a pour conséquence que n modules de résistance unitaire R_0 , voient circuler un courant proportionnel à $(nR_0)^{-1/2}$ qu'ils soient montés en série ou en parallèle (Garnier (29)). La résistance R_0 de chaque module doit donc être minimisée.

Le champ magnétique crée sur l'axe d'un inducteur solénoïdal composé de n_0 spires de rayon r_s et d'épaisseur e_s est, au droit de l'inducteur, proportionnel à :

$$B \propto \frac{2\sqrt{n_0}}{e_s (4n_0^2 + (r_s/e_s)^2)^{1/2}}$$

La fonction $(n_0 / (4n_0^2 + x^2))^{1/2}$ est illustrée sur la figure suivante pour 3 valeurs de x .



Ainsi, le nombre optimal de spires dépend du rapport r_s/e_s . Pour un solénoïde pour lequel $r_s = 4 e_s$ le nombre optimal de spires du solénoïde est 2 tandis que si $r_s = 6 e_s$, ce nombre est égal à 3. Par contre cette forme donne un nombre optimal de spires nul si $r_s/e_s = 2$!

Or, ce rapport doit être choisi comme le plus petit possible. En effet, la résistance R_0 d'un module est telle que :

$$R_0 \simeq \frac{1}{\sigma_s} \frac{n_0 2 \pi r_s}{S}$$

où S est la section méridienne d'une spire du solénoïde dans laquelle circule le courant électrique. Cette section et r_s sont difficiles à définir puisqu'il n'est pas possible de connaître la distribution géométrique réelle du courant électrique dans l'inducteur. Aux fréquences élevées la self inductance de l'inducteur, résultante des selfs inductances de chaque module et des mutuelles inductances inter-modulaires, est importante. De plus, la présence de la charge modifie la répartition des courants inducteurs. Un programme de calcul tridimensionnel prenant en compte ces effets est difficilement envisageable étant donné le nombre important de points nécessaires au maillage de l'espace. Si S est supposée égale à :

$$S = \delta_m * e_s$$

la valeur R_0 de la résistance modulaire répond à l'équation :

$$R_0 \simeq \frac{1}{\sigma_s} \frac{n_0 2 \pi r_s}{\delta_m * e_s}$$

et souligne la nécessité de diminuer le rapport r_s/e_s . Il ne faut toutefois pas oublier que r_s ne peut pas être choisi trop petit puisqu'il établit la hauteur du champ magnétique.

Une définition plus précise de la géométrie de la partie conductrice de cet inducteur et de la manière de le refroidir se trouvent dans la proposition de brevet jointe en annexe confidentielle de cette thèse.

II.3.4 - Expériences sur du mercure et métaux chauds

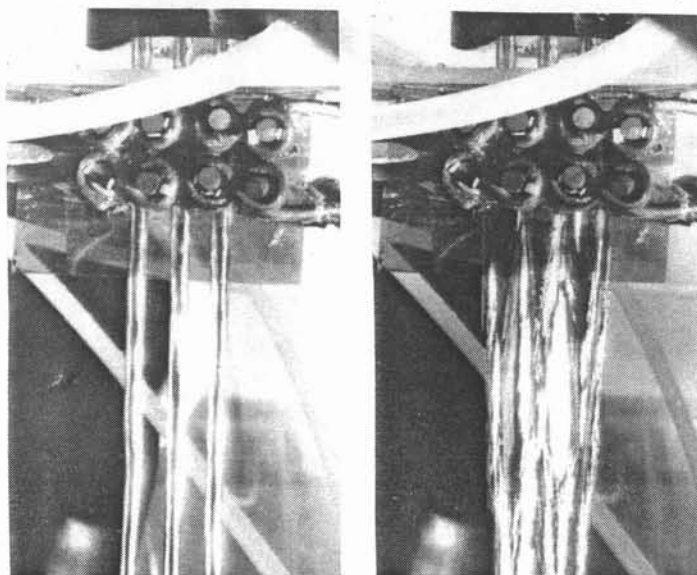
Des expériences de formage et de coalescence ont été réalisées sur du mercure, un alliage de Fe-Si-Br (amorphisable) et de l'acier inoxydable. La conception de l'inducteur ayant permis la coalescence de jets d'acier a été étayée par des tests sur mercure de nombreux inducteurs. Le détail de ces essais est rapporté par François Garnier (29). Quant à l'expérience concernant l'alliage amorphisable, elle a été réalisée dans le cadre des travaux du G.S. "Matériaux Amorphes".

L'ordre de grandeur du champ magnétique nécessaire au formage d'une lame a été calculé, pour 3 épaisseurs de cette dernière, suivant les caractéristiques physiques du mercure, du fer et de l'acier inoxydable et reporté dans le tableau ci-après.

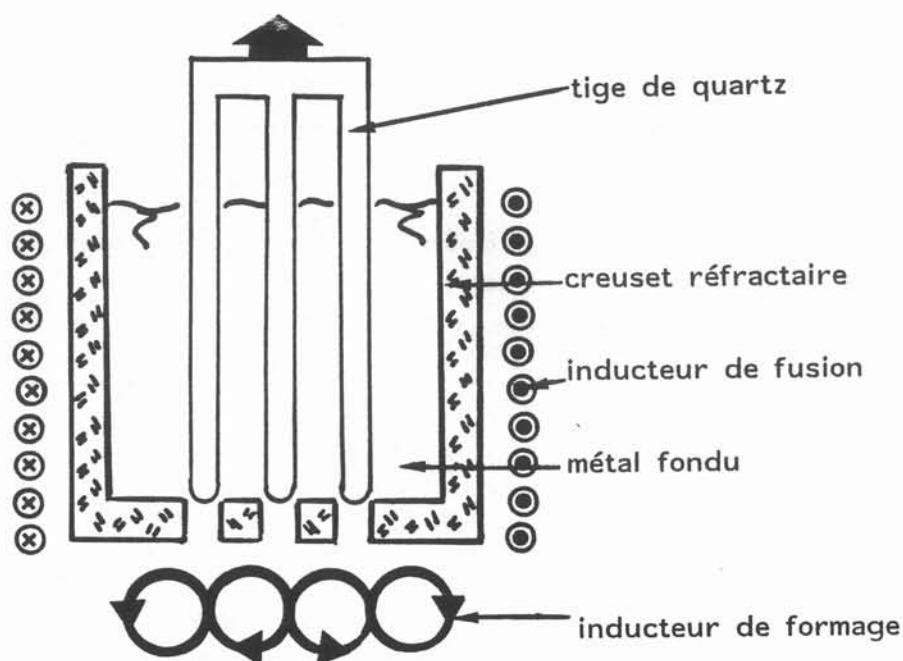
	mercure	fer	acier inox.
ρ : masse volumique kg.m^{-3}	$1,3 \cdot 10^4$	$7,4 \cdot 10^3$	$6,95 \cdot 10^3$
s : conductivité électrique à la fusion $(\text{W.m})^{-1}$	$1,09 \cdot 10^6$	$7,25 \cdot 10^5$	$8,33 \cdot 10^5$
épaisseur de peau électromagnétique correspondant à une fréquence de 350 kHz en mm	0,81	1,0	0,93
tension superficielle à la fusion (N.m^{-1})	0,485	1,81	1,6
Ordre de grandeur du champ magnétique nécessaire au formage d'une lame d'épaisseur			
1 mm	914	2650	2360
2 mm	356	749	689
3 mm	285	551	518

L'installation expérimentale utilisant du mercure est détaillée dans (24). Outre l'alimentation en courant électrique décrite au § II.3.3, l'installation comprend un circuit hydraulique de mercure. Ce dernier comprend un réservoir refroidi duquel le mercure est pompé dans une cuve à niveau constant. Il s'écoule, alors, sous l'effet de la gravité de cette cuve dans la veine expérimentale où se trouve l'inducteur, sous forme de jet libre, puis retourne au réservoir initial. Fabriqué par moulage d'une résine, l'orifice d'amenée (busette ou injecteur) du mercure dans la veine expérimentale, a une géométrie choisie par l'expérimentateur.

L'injecteur ayant servi aux essais, comporte 3 trous de diamètre 8 mm d'entreaxe 18 mm. La vitesse d'écoulement des jets est d'environ 2 m.s^{-1} . L'inducteur comporte 8 solénoïdes de 3,5 tours et, est réalisé à partir d'un tube de cuivre de 3/4 mm. Une lame de mercure de $70 \times 2,2 \text{ mm}^2$ de section est réalisée pour une puissance délivrée de 25 kW. Cette puissance rendant raisonnable la transposition de l'expérience sur un métal chaud, cet inducteur a été moulé dans un ciment réfractaire afin de résister au rayonnement et aux éventuelles projections de métal fondu. Cette opération ayant été réalisée avant que des photos du phénomène n'aient été prises, les photos présentées ci-dessus montrent la même expérience réalisée avec un inducteur beaucoup moins performant : la puissance délivrée était de 70 kW.



L'essai sur de l'acier inoxydable a nécessité la construction d'une installation expérimentale appropriée dont un schéma est proposé ci-dessous.

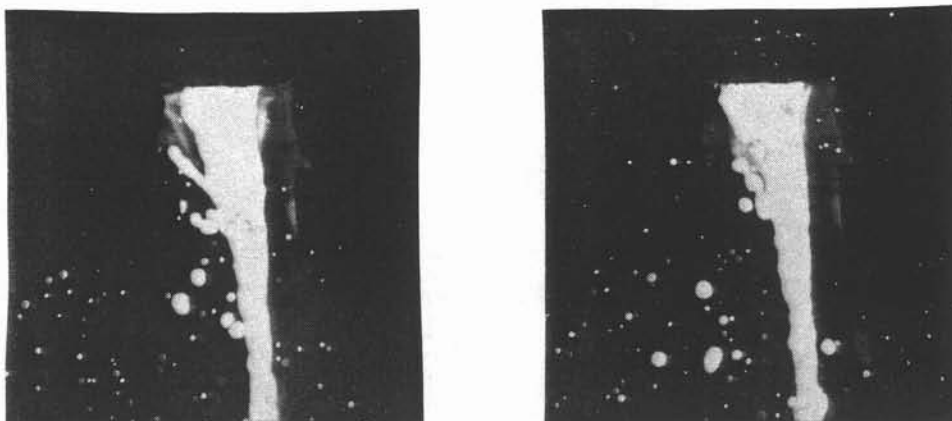


Cette installation est principalement composée d'un creuset en alumine-carbone dans lequel 3 trous de diamètre 8 mm et d'entraxe 18 mm ont été réalisés. Lors de la fonte, ces trous sont obturés par 3 tiges de quartz à bout hémisphérique. Deux titres, environ, d'acier inoxydable sont fondus, de manière conventionnelle, par un inducteur solénoïdal couplant sur le creuset et sur la charge. Pour la coulée, les tiges de quartz sont levées grâce à un vérin pneumatique à double effet. Leur course est choisie suffisamment courte pour que trempant dans le bain liquide, elles empêchent l'apparition des vortex de vidange.

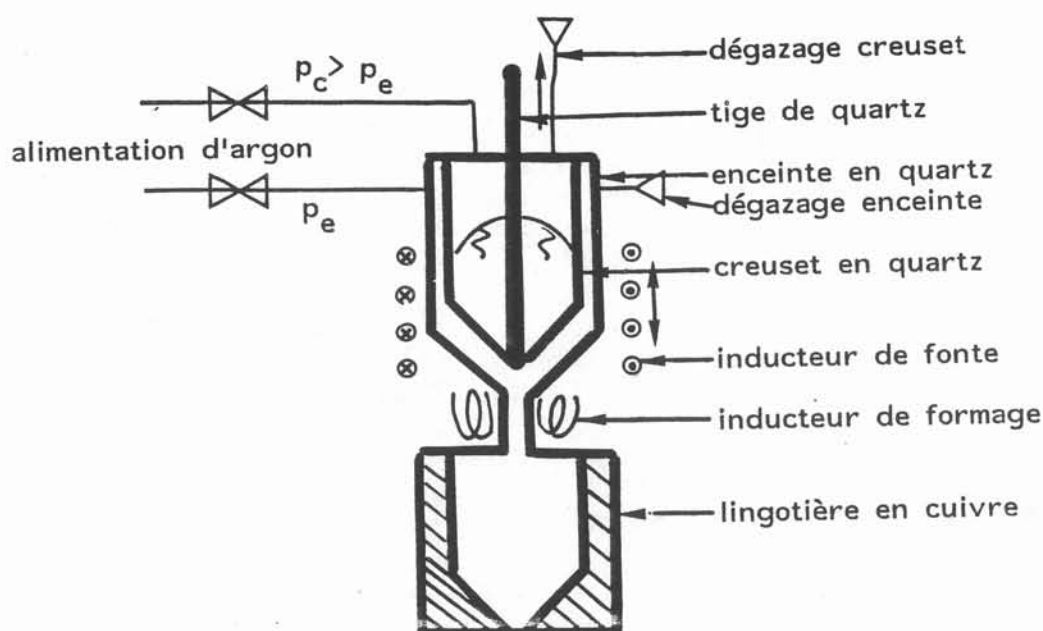
La grande difficulté de mise en oeuvre de cette installation est due à l'utilisation de deux inducteurs (fonte et formage) parcourus par des courants de fréquences très différentes. Dans les locaux du LTPCM où s'est déroulée cette expérience, un seul générateur est disponible. Le métal doit donc être surchauffé afin de permettre un basculement d'alimentation électrique de l'inducteur de fonte à l'inducteur de formage, avant la libération des trous de vidange.

Le coût de chaque essai ne permet pas leur multiplication. En effet, l'érosion du creuset est telle qu'il faut le changer à chaque essai. De plus, la chaleur fait fluer les tiges d'obturation et les fragilisent. Une remise en forme entre chaque essai est nécessaire. Un seul essai de formage et de coalescence a été effectué, étant donné le coût et la complexité de mise en oeuvre de cette installation.

Comme le montrent les photos suivantes, cet essai a été concluant, bien qu'imparfaitement réussi, puisqu'une tige de quartz s'étant cassée, a laissé un trou obturé lors de la vidange.



La mise en forme d'un jet de Fe-Si-Br a été réalisé à la demande des membres du Groupement Scientifique "Matériaux amorphes". Le matériau a été fourni par la société Imphy. L'étirement d'un jet circulaire de 3 mm de diamètre a été réalisé grâce à l'emploi de bobines de Helmholtz. L'installation expérimentale, permettant d'opérer sous atmosphère d'argon, réalisée à cet effet est représentée sur le schéma suivant :

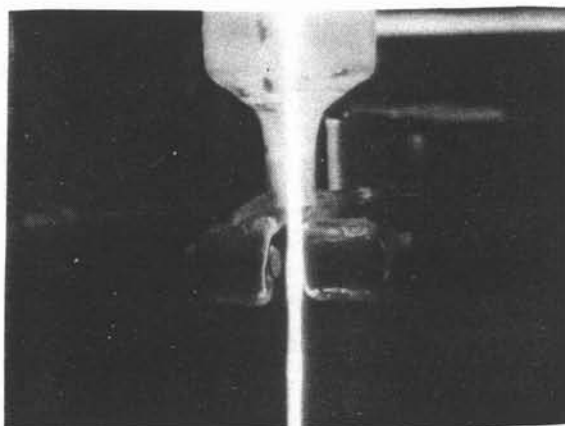


Le problème de mise en oeuvre de cette installation ont été nombreux :

- * l'étanchéité de l'installation a été difficilement obtenue,
- * de plus, afin que la vitesse de coulée soit constante, le contrôle de la pression a été recherché. En raison des variations de température existant dans cette expérience, ce contrôle n'a jamais été atteint de façon satisfaisante et reproductible.
- * Enfin, l'enceinte de quartz, présentant un resserrement au niveau de l'inducteur de formage, était systématiquement cassée à ce niveau lors des essais. La réparation, délicate opération de verrerie, coûtant très cher, la partie basse de l'enceinte a été supprimée.

La fonte a donc eu lieu sous atmosphère contrôlée d'argon et la coulée sous balayage d'argon. Deux générateurs étaient disponibles pour cette expérience. Nous avons préalablement vérifié que la fréquence (16 kHz) de l'inducteur de fonte n'accrochait pas celle de l'inducteur de formage (200 kHz).

L'étirement de la section transversale d'un jet de 3 mm de diamètre en une section de $5 \times 1,4 \text{ mm}^2$ a été obtenu. Cet effet bien évident pour un observateur in situ n'est pas très marqué sur la photo ci-dessous, en raison du fort rayonnement de l'alliage à la température 1500°C environ.



Deflection of a stream of liquid metal by means of an
alternating magnetic field

J.Etay

MADYLAM, B.P. 95, 38400 St. Martin d'Heres Cedex, France.

A.J.Mestel & H.K.Moffatt

D.A.M.T.P., Silver St., Cambridge England

Submitted to the Journal of Fluid Mechanics, December 1987.

Abstract

When coils carrying high-frequency currents are placed in the neighbourhood of a stream of liquid metal (or other electrically conducting fluid), the magnetic pressure on the liquid surface causes a deflection of the stream. This effect is studied for a two-dimensional stream on the assumptions that the width of the stream is small compared with the scale characterising the applied magnetic pressure distribution, and that the effect of gravity may be neglected over this scale. The relationship between the angle of deflection of the stream and the power supplied to the perturbing currents is determined. More complex deformations associated with distributed current sources are considered. Experiments are performed in which a thin sheet of mercury is deflected by two anti-parallel line currents. The agreement between theory and experiment is reasonable, despite a tendency towards three-dimensionality in the latter. A second configuration is considered in which a thin current-carrying circular jet is deflected by a vertical line current. The path of the deflected jet is calculated. The limitations of the analysis are briefly discussed.

1. Introduction

For many purposes involving the processing of liquid metals, it may be desirable to be able to deflect a stream through a given angle, as indicated in figure 1. In this paper we address the question of whether (and how) such deflection can be achieved by the action of the magnetic pressure p_M associated with a high-frequency magnetic field produced by current sources outside the liquid stream. A high frequency is obviously desirable so that the magnetic field is shielded from the interior of the stream by the skin effect, thus maximising the effect of magnetic pressure over the liquid surface.

Although the deflecting effect may be physically clear, it is mathematically quite complex to describe, because the magnetic field distribution is itself affected by the (a priori) unknown position of the fluid boundary. In order to analyse the effect, we shall therefore make certain simplifying assumptions, as follows:

(1) We confine ourselves to a two-dimensional configuration, in which a sheet of metal, of initial thickness d_0 and uniform velocity u_0 , moves under the influence of alternating line currents. Such sheets are used in industrial processes such as the manufacture of metallic ribbon.

(2) We assume that the field frequency, $\omega/2\pi$ is sufficiently high for it to be reasonable to treat the effect of the fields entirely in terms of the magnetic pressure on the liquid surface. This requires that the magnetic skin thickness

$$\delta = (2\mu_0\omega\sigma)^{-1/2} \quad (1.1)$$

(where σ is the electrical conductivity of the liquid and $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ in S.I. units) be small compared with the undisturbed thickness of the stream:

$$\delta \ll d_0 \quad (1.2)$$

(3) We assume that d_0 is small compared with the scale L characterising the distribution of magnetic pressure over the surface, a scale determined by the distribution of the current sources, their distance from the liquid surface and the surface curvature:

$$d_0 \ll L \quad (1.3)$$

(4) Finally, we assume that gravity may be neglected at least over the scale L on which the deflection takes place. In terms of the upstream velocity u_0 the length-scale on which gravity acts is

$$L_g = u_0^2/g \quad (1.4)$$

Hence, we require that

$$L \ll L_g \quad (1.5)$$

The assumptions (1.2), (1.3) and (1.5) are obviously very restrictive, but they permit significant progress to be made as described in sections 2-4 below. The limitations of the analysis will be considered in section 5. In section 6 we describe experimental deflection of a thin sheet of mercury, and compare the results with theory in section 7.

An alternative mechanism for stream deflection is investigated in section 8. A current is made to flow along a thin, circular metal jet which is then deflected by interaction with an opposite line current. The assumptions (1.3) and (1.5) are still necessary for analytical progress, but the prohibitive restriction on frequency (1.2) can be relaxed. Indeed, this method can be used even with direct currents. Finally, we conclude in section 9.

2. Quasi-one-dimensional analysis

The assumption (1.3) above allows the use of a quasi-one-dimensional analysis, in which the liquid stream is in effect located by the position of its lower (or left-hand) boundary. This is a curve C with parametric equations

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (2.1)$$

where s represents arc length along C from some fixed point O (as in figure 2). Although gravity is neglected we shall describe x and y as horizontal and vertical coordinates respectively. The stream is also described by its thickness $d(s)$, which is clearly (weakly) non-uniform when deflection occurs. We suppose that, upstream of the region of magnetic influence, conditions are uniform, i.e. the stream has uniform velocity u_0 and thickness d_0 so that the volume flux is

$$Q = u_0 d_0 \quad (2.2)$$

As viscous effects are negligible, the flow is then irrotational everywhere by virtue of the assumption (1.2) which ensures that the sole effect of the magnetic field is to provide a magnetic pressure distribution over the liquid surface.

Let (s, n) be taken as coordinates tangent and normal to C , as in figure 2, and let $u(s, n)$ be the velocity (effectively parallel to C) within the stream. To leading order in the small parameter d_0/L ,

$$u = u_0 + O\left(\frac{d_0}{L}\right) \quad (2.3)$$

and the component of the equation of motion (the steady Euler equation) in the n -direction is (at this order)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho u^2 K(s) \quad (2.4)$$

where ρ is the liquid density, p the pressure, and $K(s)$ is the curvature of C at position s . The curvature K is defined to be positive when the surface curves in the direction of $n > 0$, as in figure 2. To the same approximation, the appropriate boundary condition on the upper (or right-hand) boundary is

$$p(s, d_0) = p_0 - \gamma K \quad (2.5)$$

where p_0 is atmospheric pressure, and γ is the surface tension. On the lower (left-hand) boundary the condition is

$$p(s, 0) = p_0 + p_M + \gamma K \quad (2.6)$$

where $p_M(s)$ is the magnetic pressure. Integrating (2.4) using (2.5) we get

$$p(s, n) = p_0 - \gamma K + \rho u_0^2 K(s) (d_0 - n) \quad (2.7)$$

and hence the required magnetic pressure $p_M(s)$ is given by

$$p_M = \rho u_0^2 d_0 K(s) \lambda \quad (2.8)$$

where

$$\lambda = 1 - \frac{2\gamma}{\rho u_0^2 d_0} \quad (2.9)$$

The perturbation to the velocity $u(s, n)$ and width $d(s)$ are now easily determined from Bernoulli's theorem and mass conservation. Firstly, since

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2 \quad (2.10)$$

we have, using (2.7)

$$u = u_0 + K \left[\frac{\gamma}{\rho u_0} - u_0 (d_0 - n) \right] \quad (2.11)$$

The flow rate, Q , is constant provided

$$Q = \int_0^{d(s)} u \, dn = u_0 d - \frac{1}{2} K u_0 d_0^2 \lambda \quad (2.12)$$

and so the jet thickness, d , is given by

$$d(s) = d_0 + \frac{1}{2} K d_0^2 \lambda \quad (2.13)$$

It is clear from the form of (2.9) that the inertia of the uniform stream acts somewhat like a negative surface tension. As the magnetic pressure is positive, the direction in which the stream is deflected (as characterised by the sign of K) may be seen from (2.8) to depend on the sign of λ . We are mainly concerned here with parameter values such that λ is positive, i.e. when the magnetic pressure generates a momentum flux away from the currents. When $\lambda < 0$, the magnetic pressure is strongly resisted by surface tension, with the momentum flux being less important. In both these cases the jet thickness, d , increases during the interaction with the magnetic field. It is of interest to note that when $\lambda = 0$ there is no equilibrium unless the magnetic pressure vanishes. When both λ and p_M are zero, then to lowest order in the jet thickness, any shape C gives rise to an admissible steady state. Somewhat curiously, the path of the stream is maintained by its own surface tension. An analogy can be drawn with Rayleigh's observation (1894) that an arbitrarily shaped one-dimensional string of density ρ per unit length, under a tension T may move tangentially to itself with speed c provided $T = \rho c^2$.

The results (2.9), (2.11) and (2.13) are correct to order $(d_0 K_m)$ where K_m is the maximum value of $K(s)$. The analysis may be extended to higher orders of $(d_0 K_m)$ if some care is taken. Equation (2.4) still holds at the next order provided (2.11) is used for the value of u and that some account is taken of the variation in streamline curvature across the metal stream. If we write

$$K'(s) = d_0 \frac{\partial K(s, 0)}{\partial n} \quad (2.14)$$

then the required value of p_M , correct to order $(d_0 K_m)^2$, is

$$p_M = \rho u_0^2 d_0 \lambda \left[K - \frac{1}{2} K^2 d_0 + \frac{1}{2} K' \right] \quad (2.15)$$

Now to lowest order, $K' = K^2 d_0$. We thus see that (2.8) is, in fact, correct to order $(K_m d_0)^2$. Second-order corrections to the sheet thickness and tangential velocity may be found from substitution in (2.10) and then using (2.12) as previously. At higher orders, however, the normal component of velocity cannot

be ignored and (2.4) breaks down.

The equation (2.8) defines a highly non-linear relation between the curve C and the external current distribution. We may now formulate two problems: Firstly, for a given distribution of current lines what shape does the metal adopt? Alternatively, if we have a desired path C for the metal stream, how can we arrange the currents so that this is achieved? A problem of the former type was solved numerically using the hodograph method by Shercliff (1981) in his work on the shaping of liquid metal columns (Etay 1980). In that problem the balance is between surface tension and magnetic pressure, corresponding to λ negative. Here we shall consider the inverse problem, and ask: what distribution of external currents can produce a magnetic field which will provide just the magnetic pressure $p_M(s)$ given by (2.8) to yield the required deflection? One possible solution (and there will be many others) is provided by placing coils so as (in effect) to provide a current sheet $J(s)\cos\omega t$ near to the deflected stream, as indicated in figure 3. [To achieve this configuration in practice would require continuous adjustment of the position of the coils as the required deflection of the stream is produced.] This current sheet produces a magnetic field $B(s)\cos\omega t$ in the gap between the coils and the stream where

$$B(s) = \frac{1}{2}\mu_0 J(s) \quad (2.16)$$

This field is effectively parallel to C , and provides a time-averaged magnetic pressure

$$p_M = \frac{1}{4\mu_0} B^2 = \frac{1}{16}\mu_0 J^2 \quad (2.17)$$

Hence the required magnetic pressure (2.8) is achieved provided

$$\mu_0 J^2 = 16\rho u_0^2 \lambda K d_0 + O(K_m d_0)^3 \quad (2.18)$$

The strategy therefore appears straightforward: first describe the required curve C in terms of its curvature $K(s)$; then engineer the coils and electromagnetic controls so that a current amplitude $J(s)$ satisfying (2.18) is provided. The required deflection of the stream can then be maintained.

If we use the expression $K = d\psi/ds$, where ψ is the angle that the tangent to C makes with the horizontal, then by integrating (2.18) we obtain the result

$$16\rho u_0^2 d_0 \lambda \propto = \int_C \mu_0 J^2 ds = \int_C \frac{4B^2}{\mu_0} ds \quad (2.19)$$

where α is the total angle of deflection of the stream. We may express α in terms of the power supplied to the coils (per unit length in the z-direction). This power, W , is balanced by the Joule heating in the metal stream

$$W = \int \frac{|\nabla \wedge \mathbf{B}|^2}{\mu_0^2 \sigma} dV \quad (2.20)$$

or in terms of the skin depth,

$$W = \frac{1}{4\mu_0^2 \sigma \delta^2} \int_0^{d_0} e^{-\eta/\delta} d\eta \int_c B^2(s) ds = \frac{1}{2} \delta \omega \int_c \frac{B^2}{\mu_0} ds \quad (2.21)$$

Together (2.19) and (2.21) give a simple relationship between the angle of deflection and the power supplied to the external coils,

$$\alpha = \frac{W/\omega \delta}{2\rho \mu_0^2 d_0 \lambda} \quad (2.22)$$

3. Deflecting action of a weak line current

If the current sources are fixed ab initio, then the problem is much more complicated, because the magnetic field distribution is strongly coupled with the stream deflection. If the sources are weak, however, then the deflection will also be weak, and some progress is possible by perturbation analysis. We illustrate this with reference to the action of a concentrated line current $I \cos \omega t$ placed at a distance L from a stream $Q = u_0 d_0$ (figure 4). When $I = 0$ the position of the stream is $0 < x < d_0$. When $I \neq 0$, we suppose that the stream is symmetrically perturbed as indicated in the figure. To leading order, however, the magnetic field distribution may still be calculated as if the stream were in the undisturbed position. There is then an image current $-I \cos \omega t$ at $x = L$, $y = 0$, and the net magnetic field on $x = 0$, is $\underline{B} = (0, B_y, 0)$ where

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{L}{L^2 + y^2} \cos \omega t \quad (3.1)$$

The resulting magnetic pressure is

$$p_M = \frac{\mu_0 L^2 I^2}{4\pi^2} \frac{1}{(L^2 + y^2)^2} \quad (3.2)$$

and the deflection of the surface, from (2.8) with $K \sim d^2 x / dy^2$, is given by

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{L^3}{(L^2 + y^2)^2} \quad (3.3)$$

where the magnetic interaction parameter, N , is given by

$$N = \frac{\mu_0 I^2}{\rho \mu_0^2 d_0 L \lambda} \quad (3.4)$$

We integrate this with 'initial' conditions

$$x(0) = \frac{dx}{dy}(0) = 0 \quad (3.5)$$

with the result

$$x(y) = \frac{N}{8\pi^2} \frac{y}{L} \tan^{-1} \frac{y}{L} \quad (3.6)$$

an even function of y , as expected. When $|y| \gg L$, this gives

$$x = \frac{N}{16\pi} |y| \quad (3.7)$$

so that the net angle of deflection is given by

$$\alpha = \frac{N}{8\pi} \quad (3.8)$$

Equation (3.8) is strictly valid only provided the deflection is weak, i.e.

$\alpha \ll 1$; however the results of section 2 suggest that here also an arbitrarily large deflection of the stream may be achieved if the dimensionless parameter N is increased to a sufficiently large value. This parameter may be regarded as the magnetic interaction parameter, giving a measure of the transverse flux of momentum generated by the magnetic forces relative to the flux of momentum $\rho u_0^2 d_0$ in the incoming stream.

The magnetic field lines of a line current and its image consist of a family of co-axial circles. Thus, the analysis of this section and the result (3.8) in particular may be extended to the more realistic case when the line current is replaced by a wire of finite, circular cross-section. Let the wire consist of a circular cylinder radius r whose axis lies on $x = -b$, $y = 0$. Then at high frequency, it is equivalent to a line current at $x = -L$, $y = 0$, where

$$L^2 = b^2 - r^2 \quad (3.9)$$

For this value of L , the deflection obtained is given by (3.8) with (3.4).

4. More complex deformation

In the experiments that follow we shall use for electrical convenience a device which may be modelled by two opposite line currents a fixed distance, a , apart. It is a simple matter to extend the theory of section 3 to include this case. The magnetic field may be represented as a sum of two terms similar to (3.1) which can then be squared and integrated to calculate the deflection angle α . When the two line currents lie in a horizontal plane a distance a apart, the result corresponding to (3.8) is

$$\alpha = \frac{N}{8\pi} \frac{a^2}{(L+a)(2L+a)} \quad (4.1)$$

whereas when they lie in a vertical plane we find

$$\alpha = \frac{N}{8\pi} \frac{2a^2}{a^2 + 4L^2} \quad (4.2)$$

Now when $a \gg L$, which is the case of interest in sections 6-7, (4.2) describes merely a second order correction. However, there is a more important adjustment that must be made when $a \gg L$ and the line currents are vertical. The "weak deflection" approximation assumes that the deviation of the jet from the vertical is small over the entire region of interest. Yet if we consider the effects of each line current independently, it is clear that a deflection angle α due to the upper line current will lead to a separation between the lower line current and the jet of order $a\alpha$ which can be large compared with L . If we treat the line currents as independent, then the total angle of deflection, α_2 , is given in terms of that due to a single line current, α_1 , by

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha_1 + \left(\frac{a}{L}\right) \sin \alpha_1} \right) \quad (4.3)$$

So far, we have supposed that the current sources are all placed to one side of the stream. More complex stream deformation may clearly be achieved if current sources on both sides are used. In the present 'thin stream' approximation, the stream may be represented by a directed curve C . The magnetic field \underline{B} on either side of the curve is a potential field with appropriate singularities at the current sources, and satisfies

$$\underline{B} \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{on } C \quad (4.4)$$

with C approached from either side. The form of C is determined by the differential equation (2.8), with the appropriate value of p_M being the difference in the magnetic pressures on either side of C . Determination of the curve C therefore involves an unusual coupling of potential theory and differential geometry; physically there seems little doubt that a solution invariably exists, although subsidiary conditions may have to be imposed to guarantee uniqueness. We shall not attempt to pursue in this paper the general analysis, which is likely to require a numerical approach.

To illustrate the possible effects, suppose that we start with a stream passing symmetrically between two equal current sources I_1, I_2 as indicated in figure 5a. Suppose that we now slowly move I_2 upwards (figure 5b). The stream then first feels the influence of I_2 and is deflected towards I_1 ; it is

then more strongly influenced by I_1 , and is deflected in a net 'south-easterly' direction as indicated in the figure.

If the upward displacement of I_2 is continued (figure 5c), then a critical point is reached, beyond which the stream is deflected upwards rather than downwards by I_1 . (The thin stream analysis will be invalid in the immediate neighbourhood of this critical value, but will hold either side of it.) The position of I_2 may thus be used as a sensitive control for the ultimate direction of the stream.

5. Limitations of the analysis

In the introduction we have indicated four simplifying assumptions, all in effect idealisations. We now consider the qualitative effects of relaxing these assumptions.

Suppose first that δ is not small compared with d_0 , so that the field penetrates a significant distance into the liquid stream. This weakens the magnetic pressure over the surface, thus tending to diminish the deflecting effect. An additional complication is that the mean Lorentz force within the fluid will in general generate vorticity in the stream, which can thus no longer be treated as irrotational. The problem therefore becomes more complex, although a small perturbation analysis (analagous to that of section 3) would still be possible. If the ratio δ/d_0 is small but not negligible then a first correction to the analysis may be obtained by replacing the magnetic pressure p_M by

$$p_M (1 - e^{-\frac{2}{\mu_0} d_0 / \delta}) \quad (5.1)$$

Secondly, if d_0 is not small compared with L , then the quasi-one-dimensional analysis of section 2 is no longer justifiable, and a fully two-dimensional analysis would be required to find the position of both boundaries. This problem should be amenable to the variational and/or relaxation techniques of the kind adopted by Sneyd & Moffatt (1982) and Mestel (1982) for the problem of magnetic levitation.

Thirdly, if L is not small compared with the gravitational length-scale l_g , then the tendency of gravity to resist deflection of the stream from the vertical within the region of magnetic deflection can no longer be neglected. Clearly, behaviour such as that depicted in figure 5c becomes implausible in

such circumstances. Of course, as the stream descends, its speed increases under the influence of gravity (with compensating decrease in width) so that l_g increases, and paradoxically the gravitational effect becomes weaker relative to the magnetic perturbing effect on a fixed scale L .

If all three assumptions (1.2), (1.3) and (1.5) are simultaneously relaxed, then we are faced with a problem of great difficulty, whose solution would require heavy computational methods. Likewise, should our fourth and final assumption of two-dimensionality cease to apply, we would probably have to resort to numerical techniques. We shall see from the experiments described in the next section that the end effects on a nearly two-dimensional sheet are somewhat troublesome. Not only does the three-dimensional nature of surface tension become important, but also the magnetic field becomes hard to calculate near the end regions. Furthermore, the magnetic field is no longer topologically excluded from the far side of the metal stream, and some account of the magnetic pressure there should be taken. In spite of these factors, we shall see that the theory of the preceding sections does give a reasonable description of the stream behaviour.

6. Experiments

Experiments were performed in order to measure the deflection of a nearly two-dimensional stream by line currents. A full description of the experimental set-up used has been presented by Etay & Garnier (1982). Essentially, the facility consists of a mercury-filled hydraulic circuit containing a freely falling column. The initial cross-section of the column is determined by a detachable nozzle, moulded from a two-component resin, whose shape may be chosen at will. The alternating magnetic field is supplied by cooled, insulated copper inductors connected to adjustable capacitors. The circuit is powered by a 100kWatt generator and is tuned to resonance.

In these deflection experiments, the chosen nozzle is gently converging ending in a slit 1mm. wide and 39mm. long. The outlet must be carefully cleaned to prevent tearing of the mercury sheet. Photographs, with an exposure time of 10^{-3} s., were taken by a camera mounted in the plane perpendicular to the metal sheet. The exact position of the camera is adjustable though there is a certain amount of parallax. The deflection angle was measured on the

photographs.

The inductors are made from hollow copper tubing of 3-4mm. diameter through which cooling water is passed. A single line current would give rise to a large self-inductance with resultant inconvenience for the tuning capacitor. Instead, two needle-shaped inductors were built for independent use as shown in Photo 1. The current flows along one branch of the needle and then returns along the other. In the middle of the inductor the field is approximately that due to two line currents. The distance between the branch axes is 15mm., and is held constant by insulating struts. The current flowing in the inductor varies from 0 to 1520 Amps. at a frequency of 350kHz. The electromagnetic skin depth, δ , is therefore 0.4mm. and a characteristic value of the magnetic field near the sheet varies from 0 to 2000 Gauss. A higher current could not be obtained with this kind of copper tube inductor. In fact, the cooling power of the pressurised water used during the experiments was not sufficient to prevent overheating of the inductor during prolonged use.

A truly two-dimensional geometry cannot be achieved experimentally, even in the absence of electromagnetic effects. The initially flat metal sheet develops as sketched in figure 6. Surface tension causes rolls to form at both ends of the sheet which grow as the metal falls. Of course, in any industrial application, the sheet would be longer and thus end effects less important than in these experiments. A further departure from two-dimensionality occurs due to the slight twisting of the sheet when it leaves the nozzle.

When an alternating, high frequency current flows in the inductor the liquid metal sheet is repelled from the region of high magnetic field. The resulting shape, as we saw in section 3, depends mainly on a balance between inertial and Lorentz forces. Unfortunately, the departures from two-dimensionality are amplified by electromagnetic effects. The ends of the sheet are repelled further from the inductor than is the middle, due to the three-dimensionality of the magnetic field there. The resulting curved cross-section aggravates the tendency of the sheet to contract and its thickness increases. The measurement of the deflection angle can thus become difficult. This effect is illustrated on Photo 2 which shows the "worst" kind of deflection that can occur.

7. Comparison between calculated and experimental results.

The dimensionless parameter which controls the deflection is

$$N = \frac{\mu_0 I^2}{\rho u_0^2 d_0 L} \quad (7.1)$$

where μ_0 is the vacuum permeability and ρ the density of the metal ($4\pi \cdot 10^{-7}$ and $13.6 \cdot 10^3$ respectively in S.I. units). The total current flowing in the inductor, I , is measured by an oscilloscope. The sheet thickness, d_0 , and the flow velocity, u_0 , are taken to be the slit width, and the velocity through the slit as calculated from the measured flow rate. The greatest error in calculating the experimental value of N derives from the estimate of L . In keeping with (3.9), L is defined in terms of b , the distance between the coil and the liquid stream. The value of b was measured on a photograph taken with a 45° mirror placed behind the inductor. If b is small, which is desirable for maximum effect, then the accuracy of this measurement is low. Should b be too small, however, flapping of the stream caused by vibration of the experimental set-up may lead to undesirable contact between the coil and the stream. Moreover, if the coil is not held sufficiently rigid then the repulsion between it and the mercury will cause it to move slightly. In practice, b was taken as the horizontal gap between the coil and the slit.

The three-dimensionality of the deflected jet ensures that the measurement of the deflection angle, α , is not easy. The maximum deflection, α_{\max} , occurs at the ends of the sheet, which are deflected in a manner not wholly described by the two-dimensional theory. However the minimum deflection, α_{\min} is under-estimated both by the parallax of the photographs and by any adhesion that may occur between the stream and the inductor. A curious feature of the observed deflection was that the stream did not appear to bend until below the position of maximum pressure, whereas theoretically this should occur very slightly above that position. This was probably an observational effect due to the three-dimensionality. Taking the above into account, it was felt best to define α as the average of α_{\max} and α_{\min} .

Two sets of experiments were performed, one with the inductor horizontal (so that only one branch of the inductor has a large effect on the stream) and the other with a vertical inductor, so that the stream is deflected by each branch in turn. According to (4.1) and (5.1), when α is not too large it is related to N through the relation

$$\alpha = \frac{N_{hor}}{8\pi} \quad (7.2)$$

where

$$N_{hor} = N \frac{a^2}{(L+a)(2L+a)} (1 - e^{-d_0/\delta}) \quad (7.3)$$

when the inductor is horizontal. When it is vertical, we have from (4.3) and (5.1)

$$\alpha = \frac{N_{ver}}{8\pi} \left(1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{L}\right) \frac{N_{ver}}{8\pi}} \right) \quad (7.4)$$

where

$$N_{ver} = N \frac{a^2}{a^2 + 4L^2} (1 - e^{-d_0/\delta}) \quad (7.5)$$

Equation (7.4) defines a deflection angle which is a nonlinear function of N_{ver} . It varies between a value due to deflection by both branches of the inductor in turn, and one where only the uppermost branch is important. In the experiments, a typical value of a/L was about 6, and N was about 10. The deflection was thus noticeably greater when the inductor was vertical.

The experimental values of α (measured in degrees) are plotted in figure 7 as functions of N_{ver} and N_{hor} . The theoretical line (7.2) and curve (7.4) are drawn on the figure for comparison. The agreement is satisfactory for α small, but not surprisingly, the theory over-estimates the obtained deflection angle for N (and α) large. The manner in which this occurs appears to be fairly systematic. There are a number of reasons why this might be expected. Firstly, equations (7.2) and (7.4) apply only when α is small, whereas the experiments cover a wide range of α . The "weak deflection" approximation, whereby the magnetic field may be easily calculated, thus breaks down. Secondly, the constraints (1.2) and (1.3) are only weakly satisfied in the experiments. As a result, the unidirectional irrotational flow assumed in the theory may not be wholly accurate. Thirdly, it is clear that the three-dimensionality of the experiments will lead to a reduced deflection. It also hinders observation of α as we have already discussed. Finally, we should recall the difficulties inherent in the measurement of L . It may well be that there is a systematic under-estimation of L when α is appreciably large. Bearing in mind the difficulties inherent in the measurement, it was felt that the agreement between theory and experiment was satisfactory.

8. Deflection of a current-carrying jet.

We now turn to a problem which, although related, is characterised by physical mechanisms which are somewhat different. We have seen above that there are some practical difficulties in controlling a stream which is not wholly two-dimensional. In practice one would not choose to transport metal in this manner without a definite reason, as a cylindrical jet would normally be more convenient. However, the method we have described above depends intrinsically on two-dimensionality. A thin cylindrical stream would only be weakly deflected as the magnetic pressure on the far side of the stream would almost balance that on the near side. A further restriction on the use of the above controlling mechanism derives from the constraint (1.2) which requires the skin-depth to be small compared to the already thin stream thickness. We might wonder if a way of avoiding these limitations could be devised. One such means exploits the repulsive force that exists between two line currents. If we cause a current to flow along the jet it can be deflected by suitably placed guiding currents. In this section we investigate this phenomenon.

Instead of a thin sheet of metal we consider a thin jet, radius d_0 , whose centre line is co-planar with a (vertical) line current, strength I_1 , as in figure 8. The top and bottom of the jet we assume to be electrically connected so that a current, $-I_2$, may be induced along the jet. These currents may be either D.C. or A.C. In the former case, it will of course be necessary to apply a potential difference along the metal jet, whereas if the driving current is alternating, we may rely on induction to drive a reverse current I_2 . The magnitude of I_2 will then depend in general on the mutual and self-inductances of the circuit geometry. As the position of the jet is unknown ab initio, the unknown inductances will lead to complications. However, we may simplify the problem by linking the two circuits with a highly permeable ferromagnetic core. Once the system is energised, the tangential component of \underline{B} will vanish on the core surface, ensuring that the induced current is equal and opposite to the driving current,

$$I_2 = I_1 \quad (8.1)$$

This configuration, wherein a loop of liquid metal acts as the secondary "coil" of a transformer, is also used in the design of channel induction

furnaces (e.g. Mestel 1984). Equation (8.1) may also hold even when the currents are direct, as from a practical point of view it may well be convenient to join the line current I_1 and the jet in a single circuit. In what follows, we shall not distinguish between the A.C. and D.C. cases and to avoid the appearance of spurious factors of 2, we shall assume that the r.m.s. values are used for alternating currents.

Once again, we describe the metal by means of the parameterised curve C , which now represents the centre line of the (circular) jet. The driving current I_1 occupies the line $x = z = 0$. As compared with the problem studied in sections 2-4, the electric currents now lie in the x - y plane, with the magnetic field (locally) in the z -direction, rather than vice versa.

We now consider the force balance on a small portion of the jet. We shall neglect surface tension and assume the cross-sectional area, πd_0^2 and hence the fluid velocity, u_0 , are constant. The normal acceleration of the fluid element is provided by the time-averaged electromagnetic forces

$$\pi d_0^2 \rho u_0^2 K(s) = \int_{\text{cross-section}} \underline{j} \wedge \underline{B} \cdot \hat{n} dV \quad (8.2)$$

or

$$\pi d_0^2 \rho u_0^2 K(s) = I_2 (B_1 + B_2) \quad (8.3)$$

where B_1 is the magnetic field due to the driving current I_1

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \quad (8.4)$$

and B_2 is the average over the cross section of the jet of the field due to the circuit involving the jet. This average would be zero if the jet were a perfect right cylinder, but in general has two terms, one due to the local current curvature, and one due to the effects of the distant, non-parallel currents. At a general point in the x - y plane at some distance from the jet, \underline{x}_0 , we may find B_2 from the Biot-Savart law and the thin jet approximation:

$$\underline{B}_2(\underline{x}_0) = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_C \frac{d\theta}{r(\underline{x}_0, \theta)} \quad (8.5)$$

where r and θ are polar coordinates centred on \underline{x}_0 , as in figure 8. As \underline{x}_0 approaches C the integrand of (8.5) is singular. This is not surprising, as we are neglecting the finite thickness of the jet. However, even as we perform the average over a tube of radius d_0 around C , we obtain an expression which is logarithmically infinite as $d_0 \rightarrow 0$. This result is related to the fact that the self-inductance of a circular current loop is infinite. (See

for example Elliott p314). When we allow for the finite radius of the jet we obtain the result

$$B_2(s) = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \left[K(s) \left(\log \frac{8}{Kd_0} - f\left(\frac{\delta}{d_0}\right) \right) + \oint_C \frac{d\theta}{r} \right] + O(Kd_0) \quad (8.6)$$

where

$$\oint \frac{d\theta}{r} \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left(\frac{1}{r(s, \theta)} - \frac{K(s)}{2\cos\theta} \right) \quad (8.7)$$

is a path integral along C from which the singularity has been removed. The term $f(\delta/d_0)$ is a function of frequency, and may be derived from the distribution of current over the cross-section of the jet. It lies between 1 (high frequency, when skin effects dominate) and 1/2 (low frequency or D.C., when the current is uniform). As Kd_0 is small, the exact value of f is not very important. It should be noted that unlike the process outlined in sections 2-4, the configuration described in this section does not require the skin-effect and its associated magnetic pressures in order to function. Thus, any value of the frequency is admissible.

From now on, we shall treat the jet as one-dimensional, defined by the curve C. Combining (8.3), (8.4) and (8.6) we obtain

$$Kx = \beta \left(1 - \frac{I_2}{2I_1} x \oint \frac{d\theta}{r} \right) \quad (8.8)$$

where

$$\beta = \left[\frac{2\pi^2 \rho u_0^2 d_0^2}{\mu_0 I_1 I_2} + \frac{I_2}{2I_1} \left(\log \frac{8}{Kd_0} - f \right) \right]^{-1} \quad (8.9)$$

We may think of β as a modified interaction parameter. As Kd_0 is small, we note that when $I_1 \sim I_2$, β is also small, irrespective of the values of the other parameters. In this case, β is a slowly varying function of the curvature, K . In practice, however, the logarithm may not be too large, and it may be worth considering $O(1)$ -values of β . When $I_2 \ll I_1$, however, β may take all values, but is a constant, β_0 .

To begin with, we shall consider the latter case. Physically, this amounts to neglecting the field due to the secondary circuit, C. A moment's reflection reveals that in this case the curve C is identical to the path a moving, suitably charged particle would adopt under the influence of the magnetic field B_1 . Equation (8.8) reduces to

$$Kx = \beta_0 \quad (8.10)$$

and may easily be solved parametrically in terms of the angle ψ between the

tangent to C and the x-axis, giving

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{-\frac{\sin \psi}{\beta_0}} \\ y &= y_0 - \int_0^\psi \frac{x_0}{\beta_0} \sin \eta e^{-\frac{\sin \eta}{\beta_0}} d\eta \end{aligned} \quad (8.11)$$

where (x_0, y_0) is the point on C where $\psi = 0$. Equation (8.11) represents an infinite periodic curve which, somewhat amusingly, resembles in shape the electrical symbol for an inductor, as in figure 9.

The curve defined by (8.11) crosses itself at least once in each period of 2π . Clearly such a crossing is physically inadmissible when C represents a continuous stream of metal. We must consider more precisely the problem to which (8.10) applies. Any equilibrium configuration for the jet, C, must satisfy (8.3) at all points where the jet is free, that is when no external forces act upon it. Now it is clear physically that it will be impossible for the entirety of the closed circuit C to be free, for then C will be repelled in toto away from the driving line current. For the circuit C exerts no net force on itself, while it can be shown that the x-component of the total force due to the line current

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \oint_C \frac{\hat{x} \cdot d\mathbf{u}}{x} > 0 \quad (8.12)$$

for any closed curve C. Thus, part of C must be held fixed, corresponding to the rigid pipes through which the metal is being pumped. As a result, we are only interested in a portion of the curves defined by (8.11). If the jet is ejected from a nozzle at the point $x(\psi_0)$, $y(\psi_0)$ at an angle ψ_0 to the horizontal and is collected in a bath at say $y = y_b$, we would expect solutions of the form (8.11) to exist, for some parameter ranges. In figure 10, we show some of the curves defined by (8.11) drawn for $0 < \psi < \pi$, corresponding to a jet approaching horizontally and being deflected through 180° . For values of ψ outside this range the jet would be attracted by the line current rather than repelled, but the solution would remain valid until it crossed itself. The curves are normalised so that $\psi = 0$ at $x = 1$, $\psi = \pi/2$ at $y = 0$, and are drawn for differing values of β_0 . The actual jet may occupy any portion of the curve corresponding to an appropriate value of β_0 .

For large β_0 , the curves are almost circular. This is to be expected, as large β_0 corresponds to a high accelerating Lorentz force for a given jet velocity, and thus a small radius of curvature for C. This implies that the driving magnetic field, B_1 , will not vary greatly along C and the curvature

will be approximately constant. A uniform magnetic field would of course drive a circular jet. As β_0 decreases, the curve C expands in both directions, but eventually contracts in the y-direction becoming very pointed. This is also understandable, as low β_0 corresponds to a weak deflecting action and an initially horizontal jet will remain horizontal until it is so close to the vertical line current that B_1 becomes very large.

We are now in a position to estimate the validity of our neglect of the path-integral term in (8.8). Suppose that β_0 is small and that far from the driving current the arriving and departing jets are separated by a distance a. The neglect of the field due to the current I_2 in the jet compared to that due to I_1 is valid provided

$$\frac{I_2}{a} \ll \frac{I_1}{x} \quad (8.13)$$

This clearly breaks down for x sufficiently large. Thus, we should be suspicious of solutions which follow the entirety of the curves in figure 10 when β_0 is small, even when $I_2 \ll I_1$. When $I_2 \sim I_1$, the solutions we have found will break down when x is as large as some characteristic dimension of C.

When all of the terms in equation (8.8) are of the same order, it must, in general, be solved iteratively, because of the path-integral term which links the local properties of C to those of the entire curve. The solutions will tend to be highly dependent on the particular portion of the circuit C which is held fixed in space and are thus difficult to discuss in general. A natural case to consider is one where the fixed return path of the current I_2 occurs at infinity. Then (8.8) applies over all of C, which will not now be closed. One would expect the jet to straighten out at large distances from I_1 , and indeed, this must occur. The equilibrium condition (8.8) enables us to calculate the total angle of deflection, α , between the two asymptotes of C as in figure 8. For large x, the change in $\Theta(s)$ over the curved portion of C is small. The line integral is therefore dominated by the contribution from the straight portions of the jet, and the configuration is asymptotically equivalent to that of two line currents inclined at $\alpha/2$ to the vertical. (If the angles of inclination are not the same then it is impossible for both the inclined line currents to be in equilibrium.) Thus for large x, (8.8) reduces to:

References

Elliott 1966 Electromagnetics p314. McGraw-Hill.

Etay J. 1980 Formage et guidage des metaux liquides sous l'action de champs magnetiques alternatifs. Report de D.E.A. de Mecaniques des Fluides, Inst. Natn. Polytechnique, Grenoble.

Etay J. & Garnier M. 1982 Le controle electromagnetique des surfaces metalliques liquides et ses applications. J. de Mechanique Theorique et Appliquee Vol 1, 6 p911-925.

Mestel A.J. 1982 Magnetic levitation of liquid metals. J. Fluid Mech. 117, 27-43.

Mestel A.J. 1984 On the flow in a channel induction furnace. J. Fluid Mech. 147, 431-447.

Rayleigh J.W.S. 1894 Theory of Sound, Macmillan.

Shercliff J.A. 1981 Magnetic shaping of molten metal columns. Proc. R. Soc. Lond. A 375, 455-473.

Sneyd, A.D. & Moffatt, H.K. 1982 The fluid dynamics of the process of levitation melting. J. Fluid Mech. 117, 45-70.

Figure Captions

- (1) Schematic illustration of deflection of liquid metal stream by the magnetic pressure due to high frequency current sources.
- (2) The coordinate system.
- (3) Current sheet configuration giving rise to a desired stream deflection.
- (4) Stream deflection by a concentrated current source. For a weak current, the shape of C is given by (3.6).
- (5) Deflection of a narrow stream by two equal currents I_1 and I_2 for various positions of I_2 . The position of I_2 may be used as a sensitive control for the ultimate direction of the stream, gravity being neglected.
- (6) Sketch of the development of a nearly two-dimensional stream. Left, without current; right, deflected by a high frequency line current.
- (7) Observed deflection angle α (in degrees) against N. (a) Horizontal
(b) Vertical
- (8) Configuration for the deflection of a current-carrying jet.
- (9) Theoretical path of a weak current-carrying jet under the influence of a vertical line current, for $\beta_0 = 1.5$.
- (10) Possible jet paths suitably normalised. $\beta_0 = .0625, .125, .25, .5, 1, 2, 4, 8, 16, 32$.

Photographs

- (1) The inductors used in the experiments.
- (2) Non-uniform deflection of the metal stream.

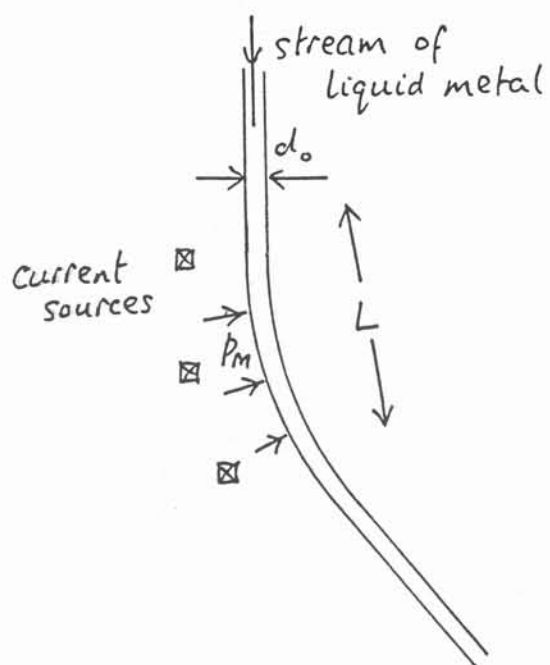


Figure 1.

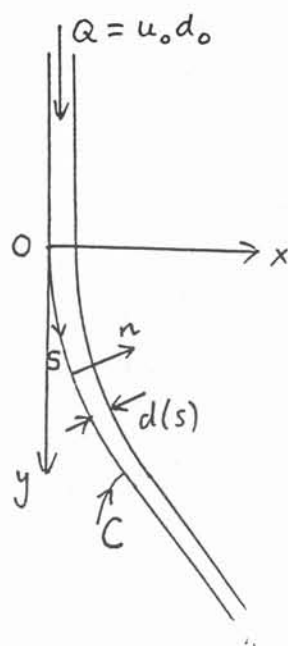


Figure 2.

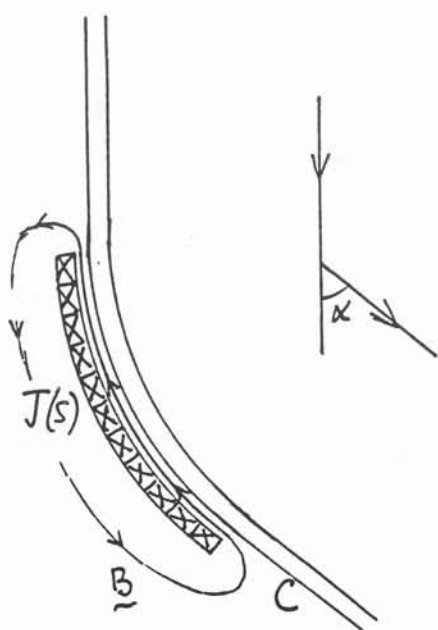


Figure 3.

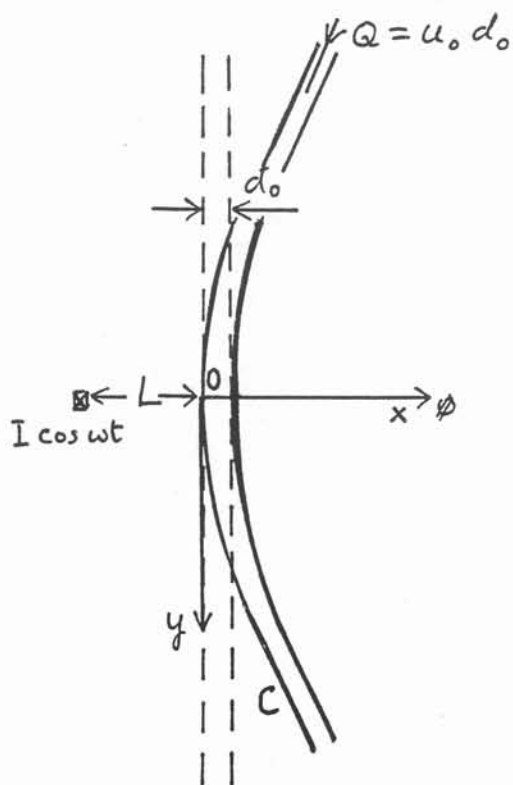


Figure 4.

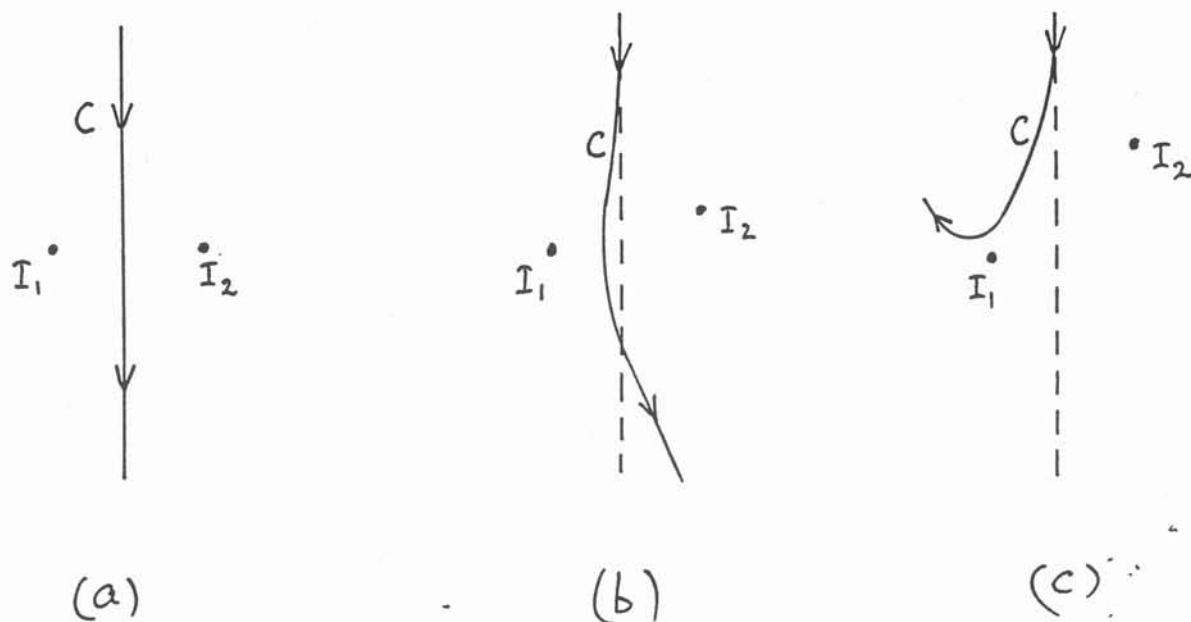
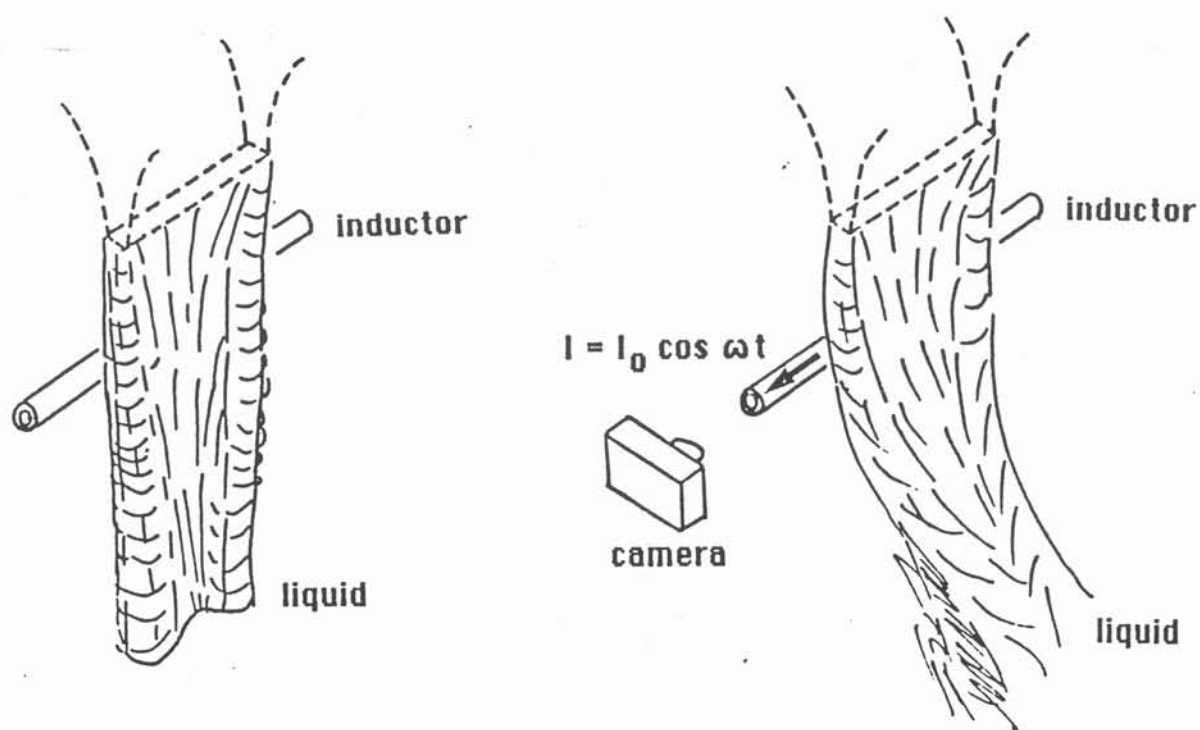


Figure 5.



A liquid foil flows under gravity from a slit-shaped nozzle.

A high frequency electric current flows in the inductor. The liquid metal foil escapes from the region where the generated magnetic field is strong.

figure 6

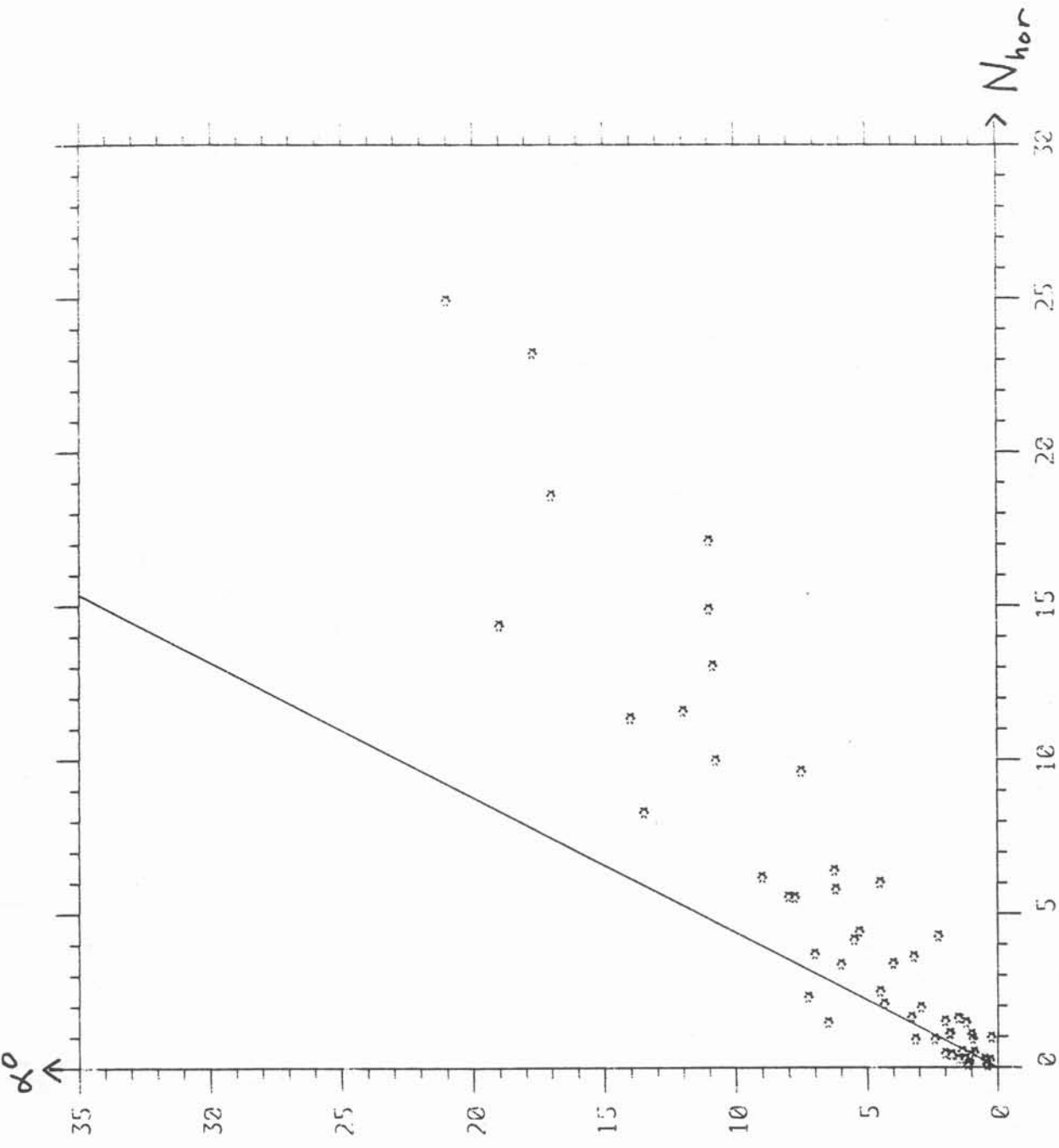


Figure 7a

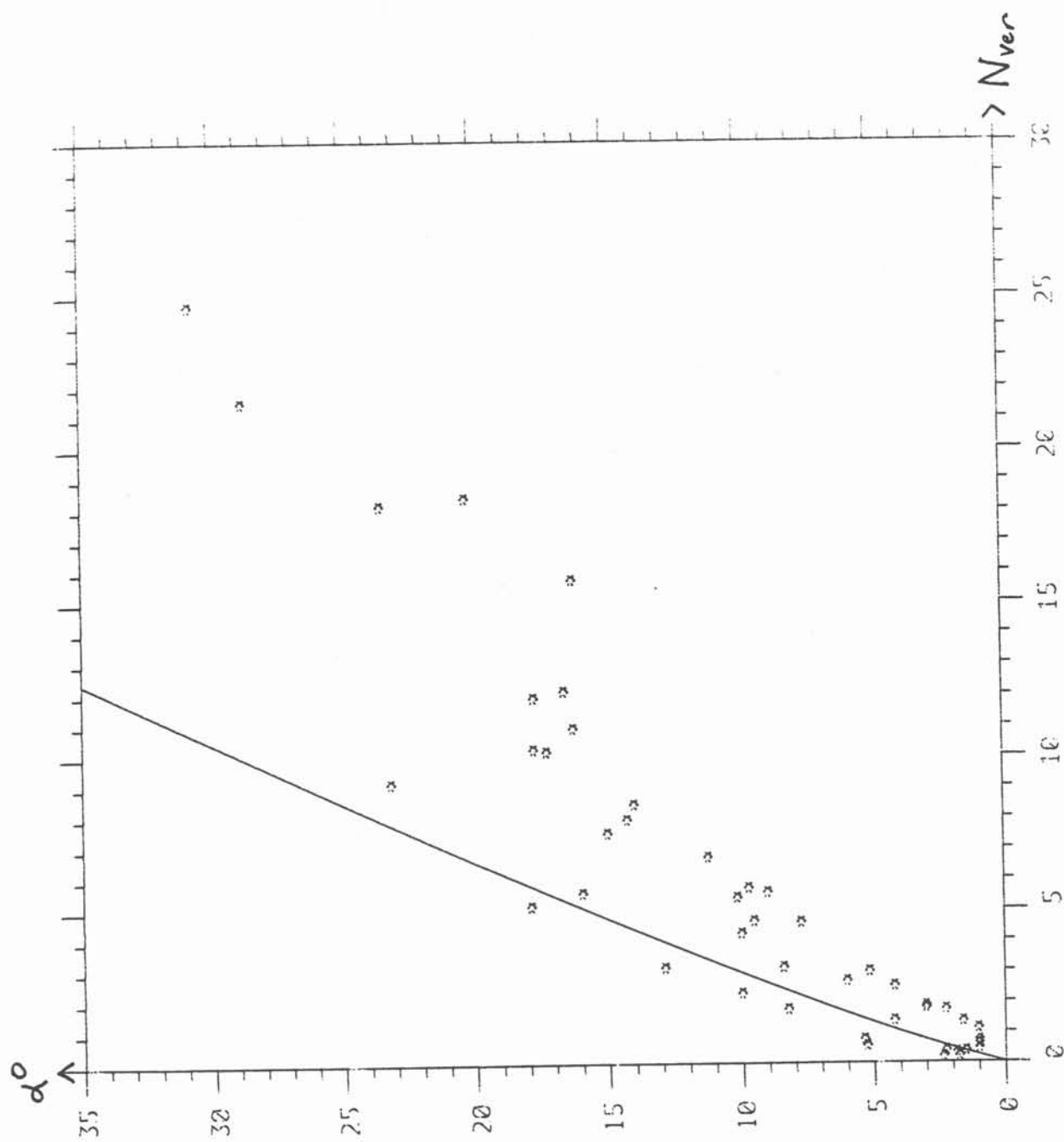


Figure 76

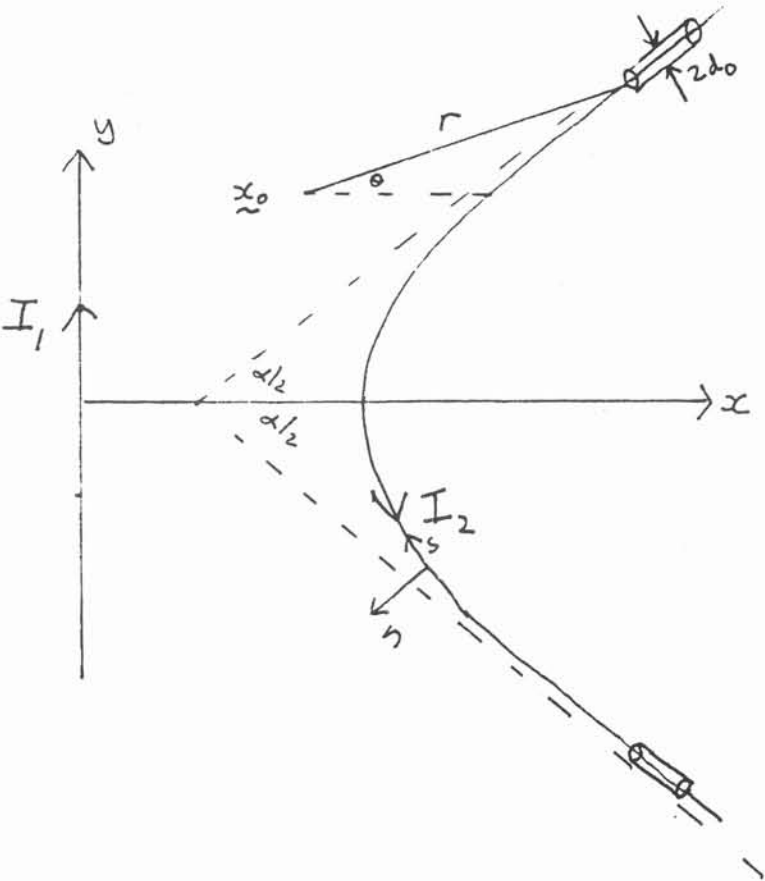


Figure 8

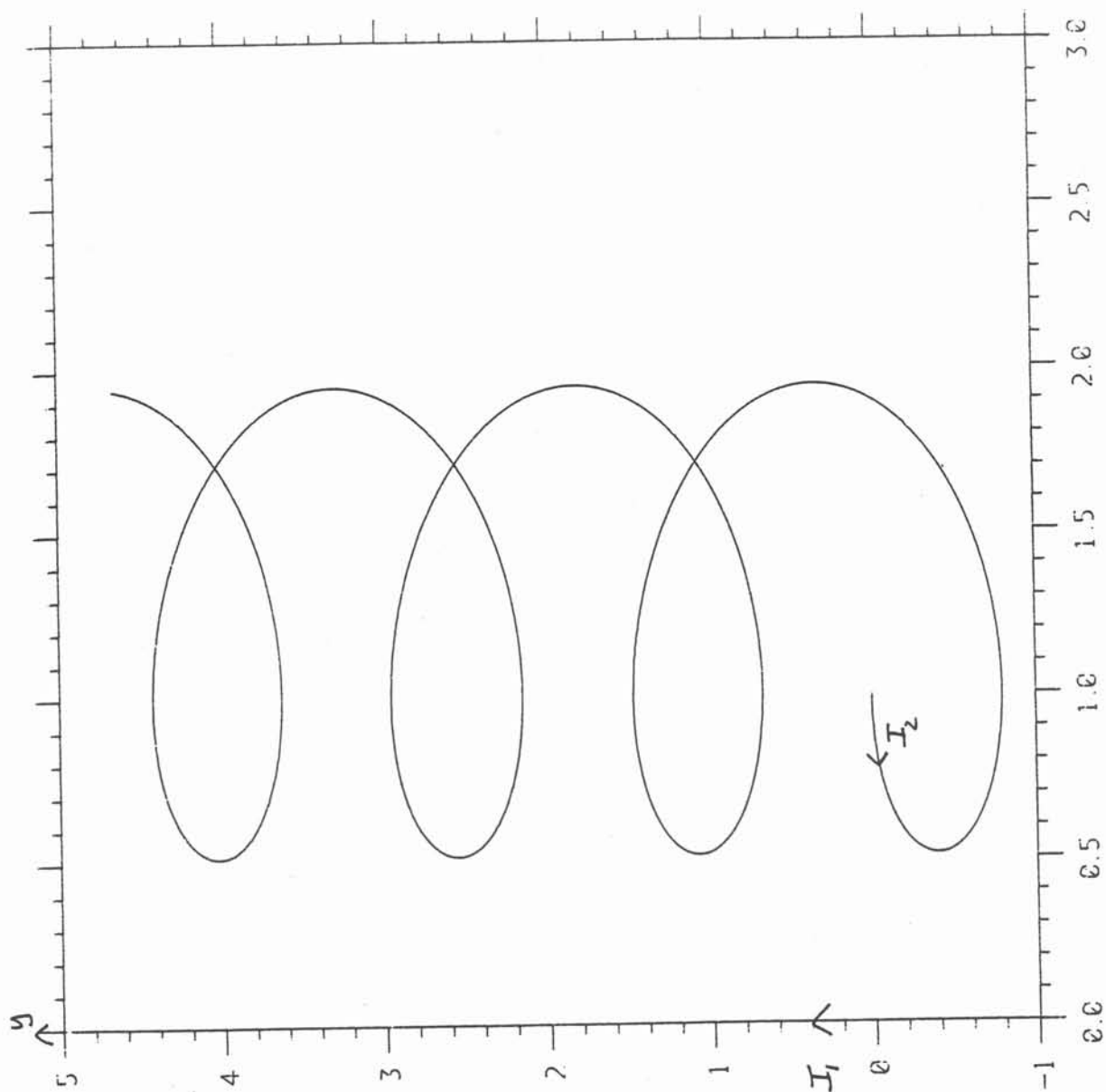


Figure 9

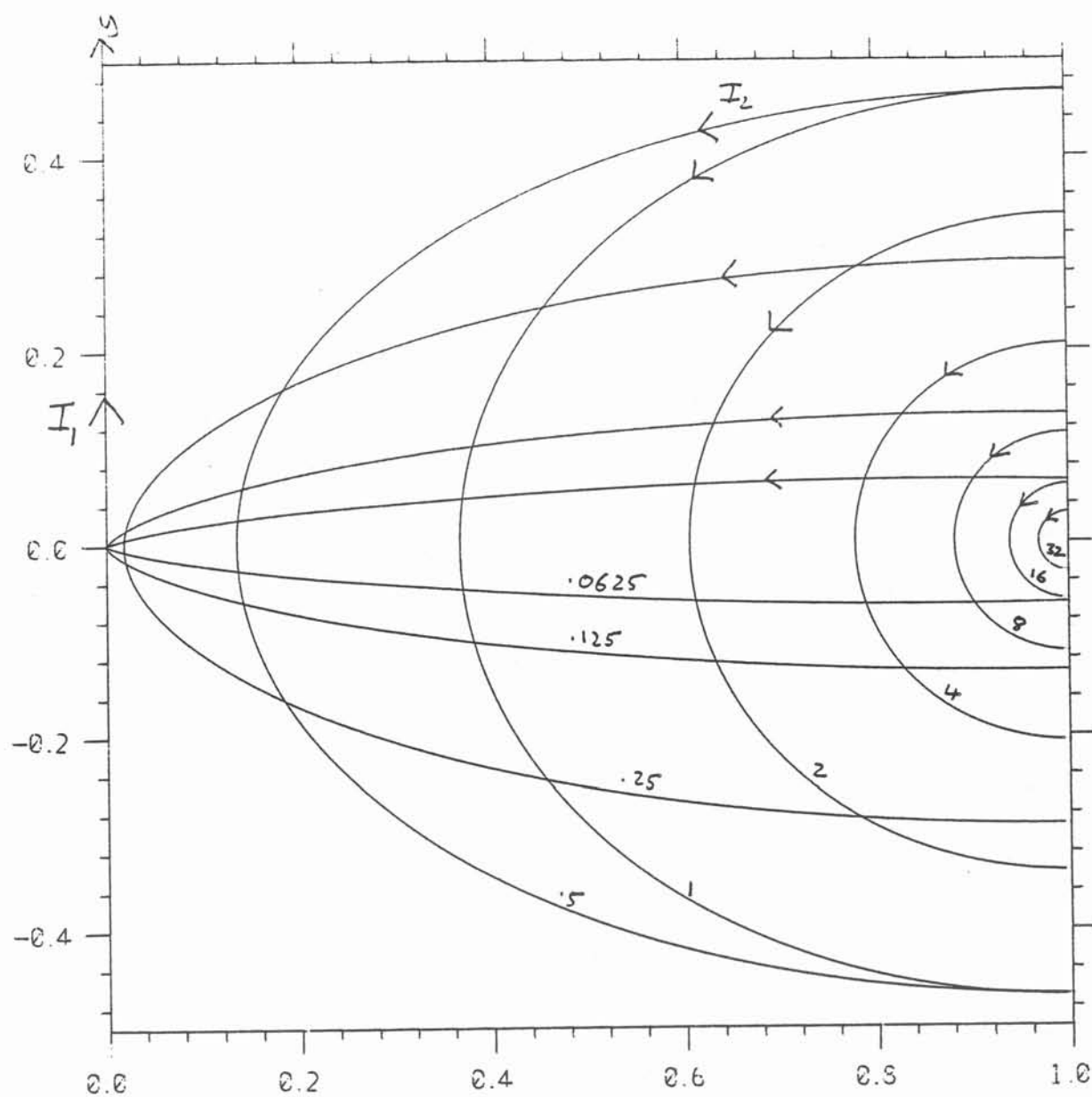
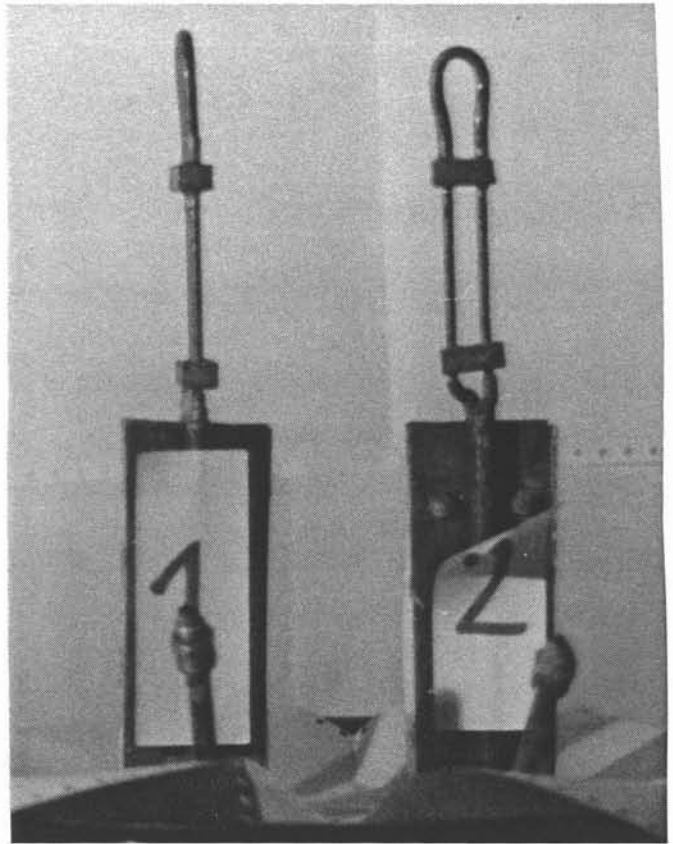
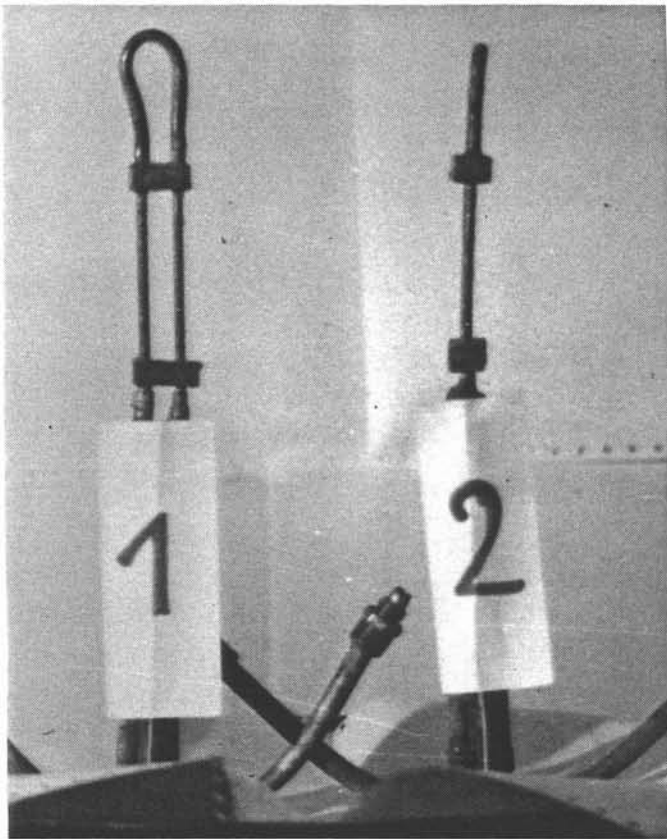
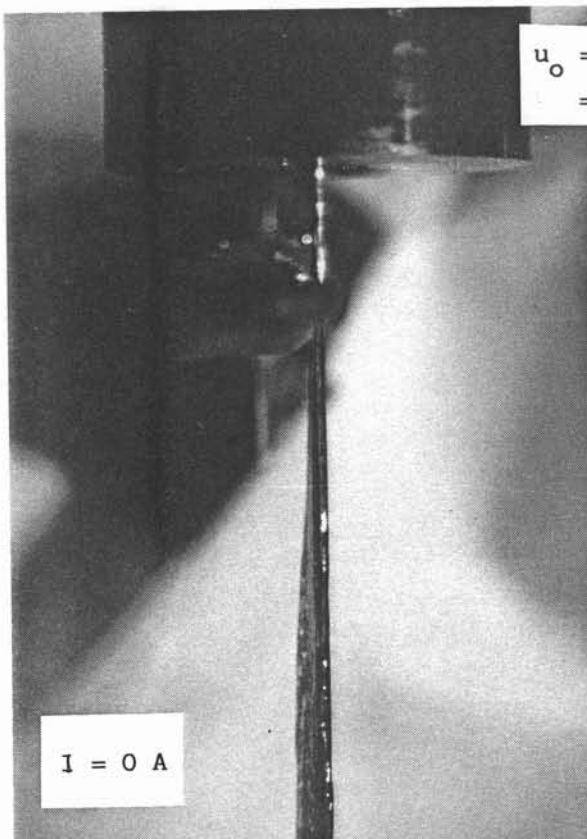


Figure 10



number one is horizontal
number two is vertical

photo 1 needle-shaped inductors



$$u_o = 1.74 \text{ m.s}^{-1}$$

$$L = 1.42 \text{ mm}$$

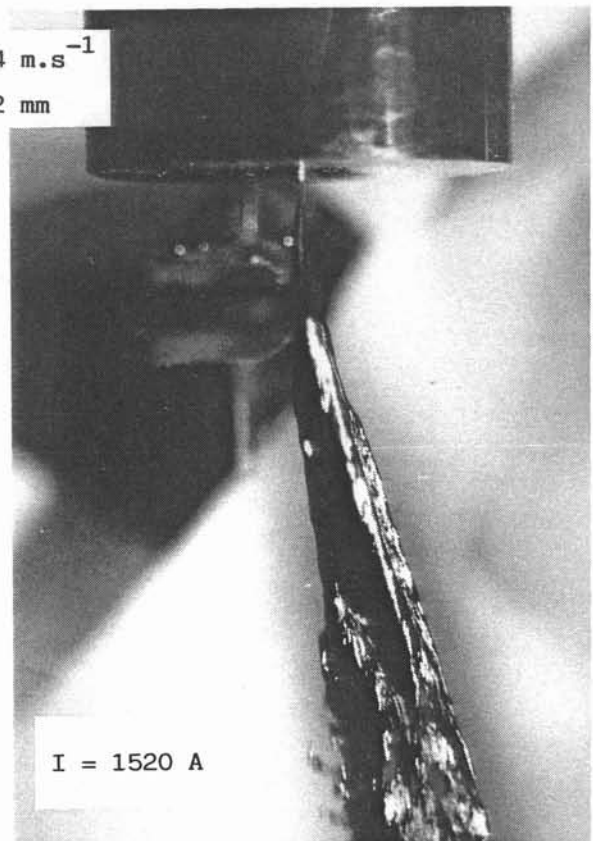


photo 2

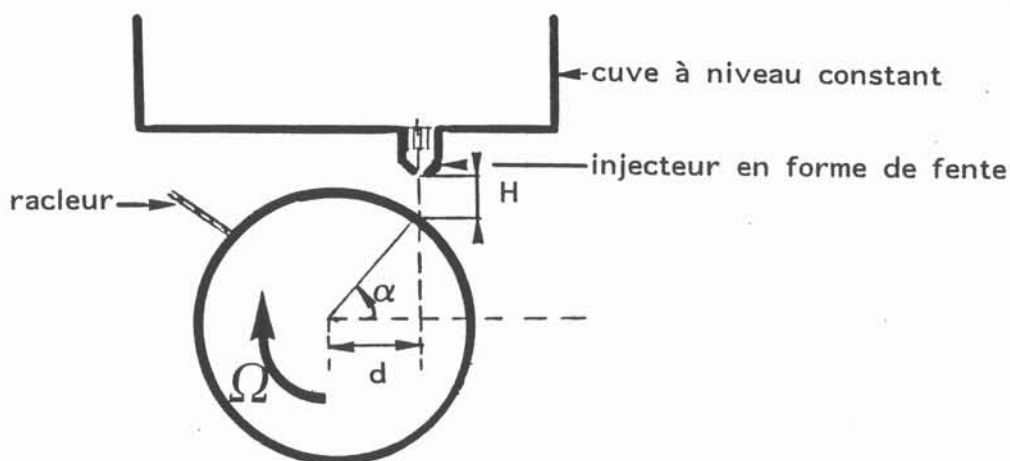
II.5 - ETUDE DE L'IMPACT D'UNE LAME LIQUIDE SUR LA TRANCHE D'UNE ROUE EN ROTATION

II.5.1 - Motivation et description de l'installation expérimentale

Un inducteur de formage de lame, de type bobines de Helmholtz, a été utilisé sur un jet d'étain fondu de 3 mm de diamètre afin de l'élargir avant qu'il ne se solidifie sur la tranche en cuivre d'une roue refroidie (23). Bien que mettant en évidence la largeur nettement supérieure d'un ruban élaboré après déformation électromagnétique, ces essais ont soulevé un important problème lié à l'impact de l'étain sur le substrat refroidi. Des gouttelettes de métal fondu sont projetées contre l'inducteur sur lequel elles se solidifient. Un écran électromagnétique entre l'inducteur et le jet liquide est ainsi formé. Ce qui est néfaste à l'effet recherché.

Ceci nous a conduit à étudier plus précisément les phénomènes d'impact d'une lame liquide sur la tranche d'une roue en rotation. Afin de déterminer les conditions optimales d'impact, une installation expérimentale a été construite et son exploitation mise en oeuvre. Cet impact optimum est défini comme étant le plus stable possible tout en réalisant un fort cisaillement dans le liquide après l'impact.

Cette installation, décrite dans (Julliard(44)), est composée d'une cuve à niveau constant de laquelle débouche un injecteur en forme de fente (épaisseur e , largeur l) et d'une roue d'une trentaine de centimètres de diamètre ($2R_r$) montée directement sur l'arbre du moteur assurant sa rotation. Le liquide d'essai est de l'eau.



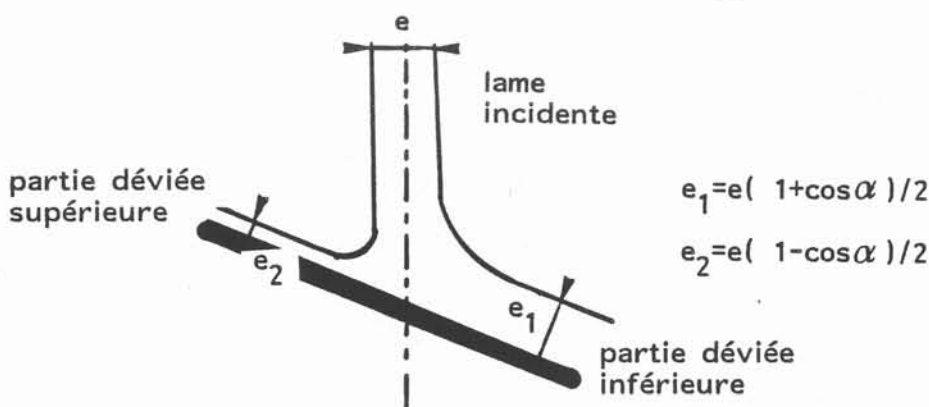
La vitesse de rotation de la roue Ω ($200 < \Omega < 2800$ t/mn) et l'angle d'impact α ($20 < \alpha < 50^\circ$) (ou bien $d = R_r * \cos \alpha$) sont les deux paramètres variables de cette installation. La hauteur H est ajustée de façon à ce que l'injecteur n'ait pas d'effet sur la géométrie du pied de jet. Pour une fente d'injecteur donnée, la vitesse du jet est invariable.

Avant d'exposer les résultats des expériences, l'impact du jet va être défini et les effets de la gravité, de la largeur finie de la lame, de la viscosité, de la rotation et de l'air ambiant vont être décrits.

II.5.2 - Description de l'impact

Les lames liquides sont souvent modélisées comme des écoulements bidimensionnels, stationnaires et irrotationnels. Ainsi Goh (38) calcule la forme d'un jet s'écoulant, sous l'effet de la gravité, d'un canal possédant un plafond, et Geer (36) des géométries compliquées dans lesquelles les surfaces de la lame sont mixtes (libres ou solides). Dans tous les cas, les effets de la tension superficielle et de la viscosité sont ignorés.

Une telle modélisation, appliquée à la géométrie d'un jet frappant une surface inclinée donne, en l'absence de gravité, la configuration suivante :



Les épaisseurs des parties déviées augmentent proportionnellement à l'épaisseur de la partie incidente. L'existence de la ligne de séparation est confirmée dans nos expériences par injection de colorants.

Dans cette géométrie la prise en compte de la gravité ralentit la partie déviée supérieure, l'épaisseur e_2 augmente. La vitesse du liquide s'annule pour une dénivellation Dz telle que :

$$\Delta z = U^2/2g$$

qui correspond à une vingtaine de centimètres pour les conditions expérimentales.

Cette côte est atteinte en un temps t compris entre les valeurs :

$$1,05 < t < 1,50 \text{ s}$$

selon l'angle d'impact, variant entre 23 et 50 degrés. De ce point le liquide va s'écouler sous l'effet de la gravité. Ceci a pour effet de perturber l'écoulement des parties déviées.

La stabilité de l'ensemble du pied du jet est déterminée par le comportement de la partie déviée supérieure. La quantité d'eau contenue dans cette dernière diminue avec l'angle d'impact.

II.5.2.1 - Effet de la largeur finie de la lame

Le fait que la géométrie étudiée ne soit pas infiniment large a deux conséquences importantes :

1/ Deux bourrelets dus à la tension superficielle s'établissent aux extrémités de la lame (§ II.5.1.1). Leur hydrodynamique est différente de celle de la partie plus bidimensionnelle de la lame, ainsi que l'aspect de leur partie déviée. Les rives des rubans élaborés par une technique de coulée directe seront donc toujours d'une qualité différente de celle du centre. Cet effet est d'autant plus secondaire que la lame est large.

L'injection de colorant dans la partie bidimensionnelle de la lame montre un filet qui diffuse peu, tandis qu'une injection dans les bourrelets provoque une coloration instantanée du bourrelet. Il n'y a pas échange de liquide entre le bourrelet et la partie bidimensionnelle de la lame.

2/ Une fraction de liquide de la partie déviée supérieure peut s'écouler de part et d'autre de la lame. Le reste du liquide perturbe l'écoulement comme décrit précédemment. Cet effet augmente avec l'épaisseur de la lame incidente.

II.5.2.2 - Effet de la viscosité

Le mouvement de translation du substrat ne peut être introduit que par la prise en compte de la viscosité. La condition de non glissement à la paroi introduit des profils de vitesses qualitativement ressemblants au schéma ci-dessous



Dans nos expériences le rapport de la vitesse de rotation de la roue V_r à la vitesse U du jet incident est tel que :

$$1,7 < V_r / U < 18$$

Ces profils ne comportent pas de point d'inflexion, ils sont donc stables au sens de Rayleigh.

En l'absence de plus amples informations sur l'écoulement de la partie déviée supérieure, il est impossible de connaître à quelle hauteur se situe le point de vitesse nulle. Toutefois des expériences menées sur une lame d'épaisseur 6mm, ont montré que le cisaillement très fort au voisinage du substrat en mouvement diminue dans l'épaisseur de la lame. Cet effet est très favorable à la qualité métallurgique des rubans métalliques élaborés par la technique de "melt spinning".

II.5.2.3 - Effet de la rotation du substrat

Le substrat expérimental n'est pas un plan mais la génératrice d'un cylindre en rotation. Deux nouveaux phénomènes s'ajoutent à ceux décrits précédemment.

Le premier est une limite expérimentale. Afin de nettoyer la roue du film d'eau qui, par tension interfaciale, lui reste attaché, un racleur a été positionné. Lorsque l'angle d'impact est grand, il empêche la partie déviée supérieure de s'écouler naturellement et provoque un engorgement de l'installation. C'est pourquoi la limite supérieure de l'angle d'impact a été établie à 50°.

Le deuxième phénomène est lié à l'existence d'une force centrifuge déstabilisante qui n'existe pas si le substrat est un plan incliné en translation.

Un écoulement soumis à une rotation est stable si (11) :

$$d/dr(r V(r))^2 \geq 0 \text{ partout}$$

Dans les expériences, la vitesse de la roue est toujours supérieure à celle du jet incident. Le fluide adjacent à la roue subit donc une contrainte tangentielle τ de la forme:

$$\tau = -\nu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$$

où y est la direction normale à la roue dirigée vers l'extérieur.

Au voisinage de la roue, la vitesse du liquide s'écrit :

$$V(r) = dv/dy * (r - R_r) + V_r$$

et donc

$$\begin{aligned} r \frac{dV}{dr}(r) + V(r) &= -\frac{\tau}{\nu} (2r - R_r) + V_r \\ &< V_r \left(-f \rho \frac{V_r R_r}{8\nu} + 1 \right) \end{aligned}$$

puisque τ peut être exprimé, conventionnellement, grâce à l'introduction d'un coefficient de frottement f :

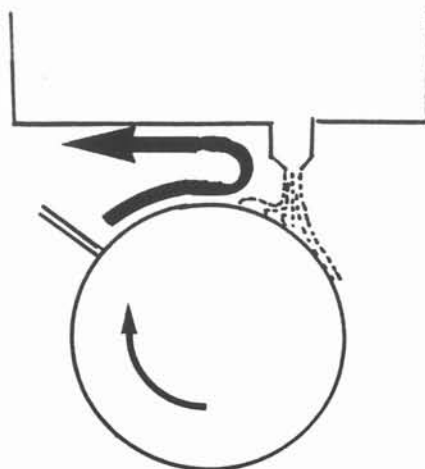
$$\tau = f r V_r^2 / 8$$

Les diverses relations données par la littérature (37) entre f et $Re = V_r * e_i / \nu$ établissant que $f Re$ est toujours très supérieur à 10. Donc, au voisinage de la roue :

$$r dV/dr + V \ll 0$$

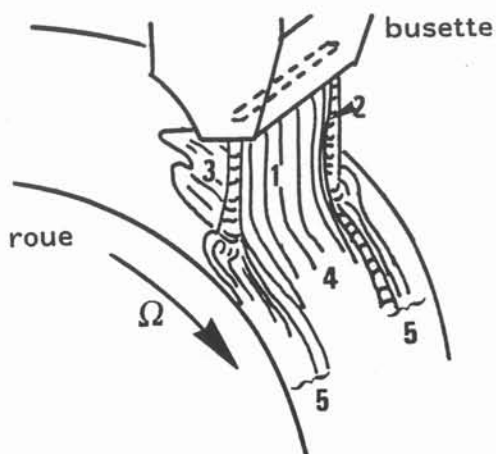
II.3.2.4 - Effet de l'air ambiant

La roue, à partir d'une vitesse de rotation de 1000 t/mn en cuivre, déplace de l'air ambiant. Etant donnée la configuration géométrique de l'installation expérimentale, la circulation de l'air est semblable à celle schématisée ci-après.



Cette circulation d'air engendre un déplacement aval de l'impact du jet et donc une diminution de l'angle d'impact. Ce déplacement n'est pas homogène sur la largeur de la lame : le centre est plus dévié que les extrémités. Lors de certaines expériences, des chiffons ont été placés près du point d'impact, afin de supprimer la circulation d'air. Des modifications importantes du comportement du pied du jet ont pu être ainsi observées.

La forme de l'impact obtenu est schématisée ci-dessous



Les zones 1 et 2 forment la partie incidente du jet. La zone 1 est bidimensionnelle et laminaire. La zone 2 est constituée de bourrelets dus à la tension superficielle. La zone 3 forme la partie déviée supérieure du jet. Elle est appelée bouillonnement ou flaque.

Les zones 4 et 5 forment la partie déviée inférieure du jet. La zone 4 contient une partie du liquide de la zone 1 et du liquide provenant de la flaque 3. Dans la zone 5 s'écoule du liquide provenant des bourrelets 2 et aux basses vitesses de la flaque 3.

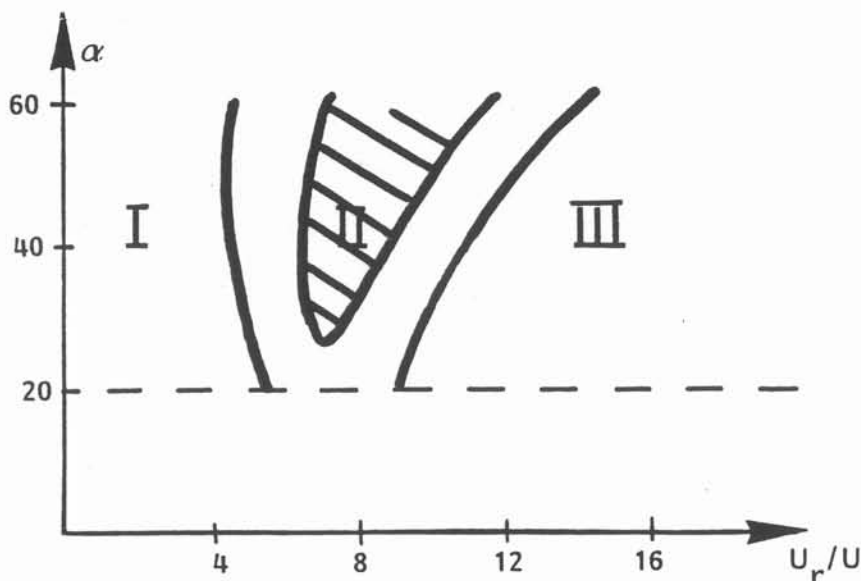
II.5.3 - Résultats expérimentaux

Bien que l'écoulement possède un nombre de Reynolds élevé, des géométries parfaitement reproductibles ont été définies. Elles sont résumées dans le tableau suivant :

aspect du	bouillonnement	lame		gouttelettes
vitesse de rotation de la roue	zone 3	zone 4	zone 5	
géométrie I $1,7 < V_r/U < 4$	* important * grosses structures régulières * battements réguliers ($f \approx 5\text{hz}$)	* épaisseur variable (pour $1,65 < U_r/U < 2$) * ondes axisymétriques	* débordement	non
géométrie II $5 < V_r/U < 9$ 600 à 1100 t/mn	* aplati sur la roue * structures plus fines et irrégulières * 2 jets formant un triangle * pas de battement	* pas d'ondes visibles		oui
géométrie III 1600 à 2400 t/mn $10 < V_r/U < 18$	* forme de triangle * décollé de la roue puis plaqué contre la lame incidente	* très perturbée * les ondes ne sont plus axisymétriques * apparition de trainées plus claires		oui * plus fines * projetées vers l'avant * perturbent le jet incident

effet de l'entraînement de l'air

L'évolution de ces comportements avec l'angle d'impact est résumé sur le graphique suivant :

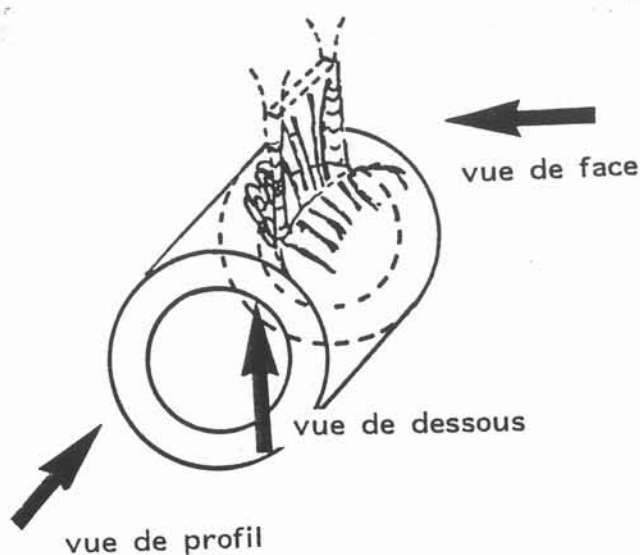


la zone achurée détermine approximativement la région du plan $(U_r/U, \alpha)$ où l'impact est le plus stable

Aux petits angles d'impact, la géométrie II n'existe plus.

Les frontières entre les différentes géométries ne sont pas nettes et des comportements mixtes peuvent être observés.

Un exemple de chacune de ces géométries est présenté ci-dessus. Ces photos ont été réalisées avec une roue en plexiglass afin de permettre la visualisation du pied de jet dans 3 directions

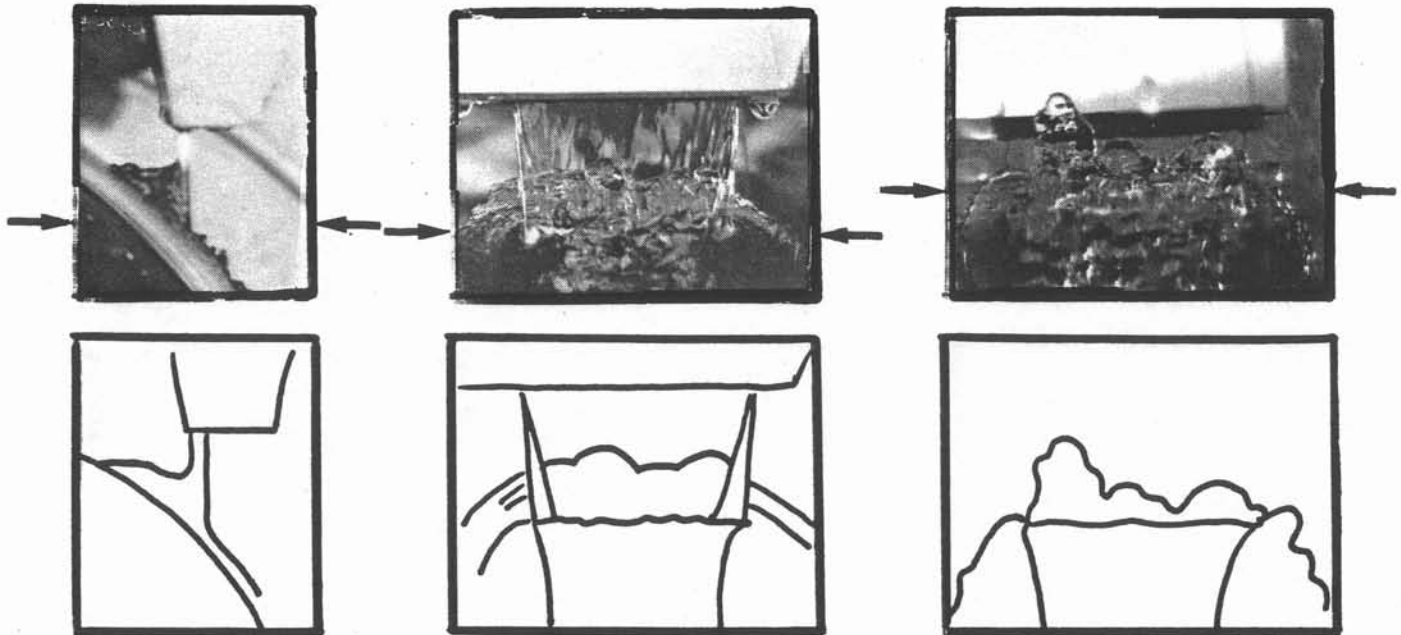


Sur ces photos l'angle d'impact est de 45° .

Vue de profil

Vue de face

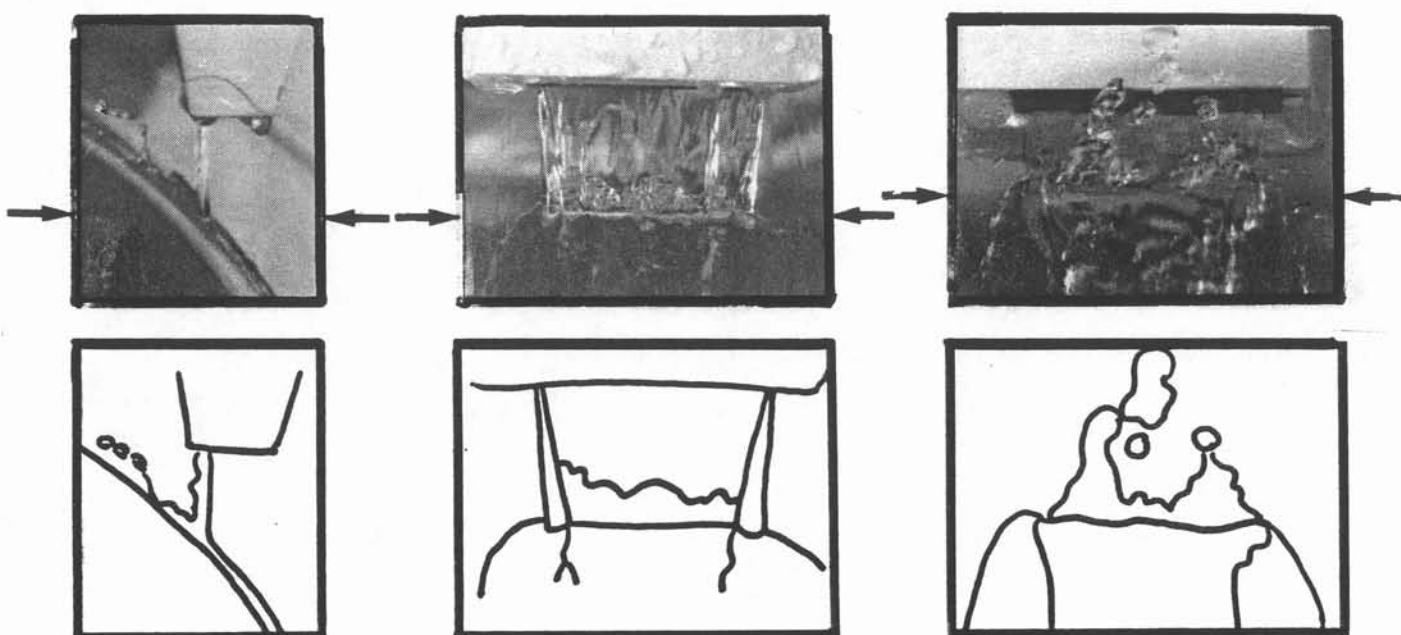
Vue de dessous



GEOMETRIE I

$V_r/U = 1,70$. Le bouillonnement présente de grosses structures

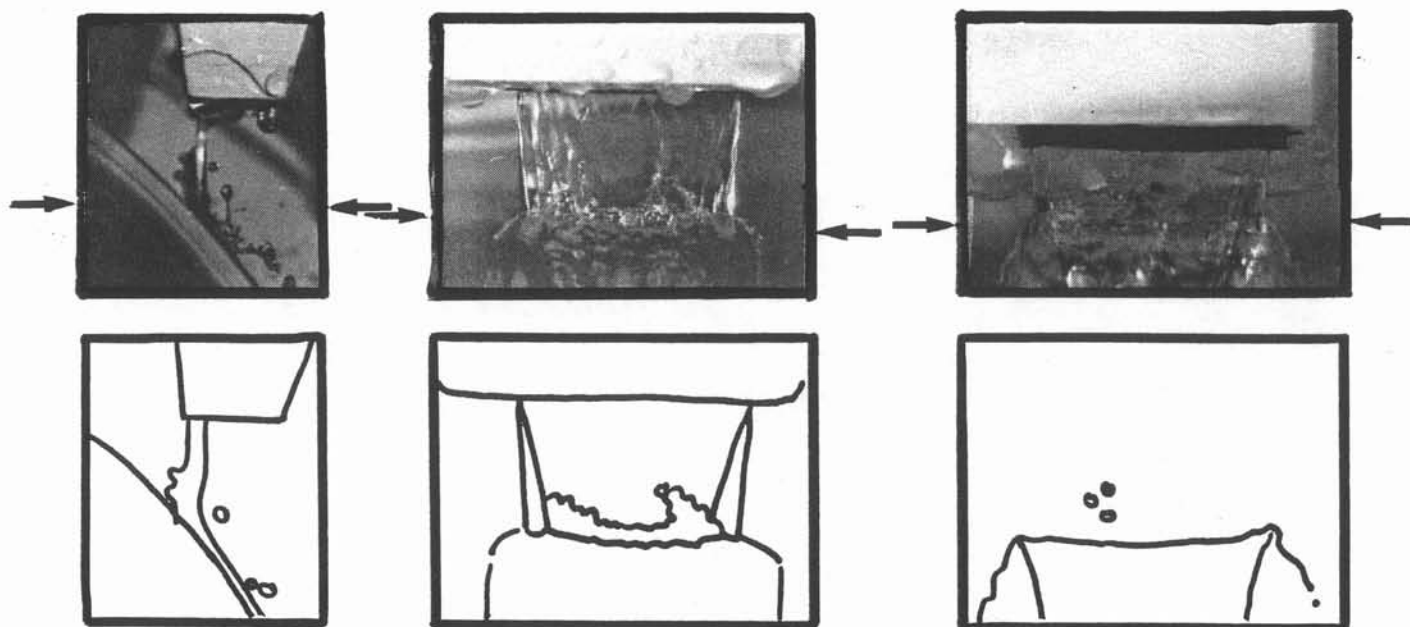
→ Les flèches indiquent le niveau de l'impact.



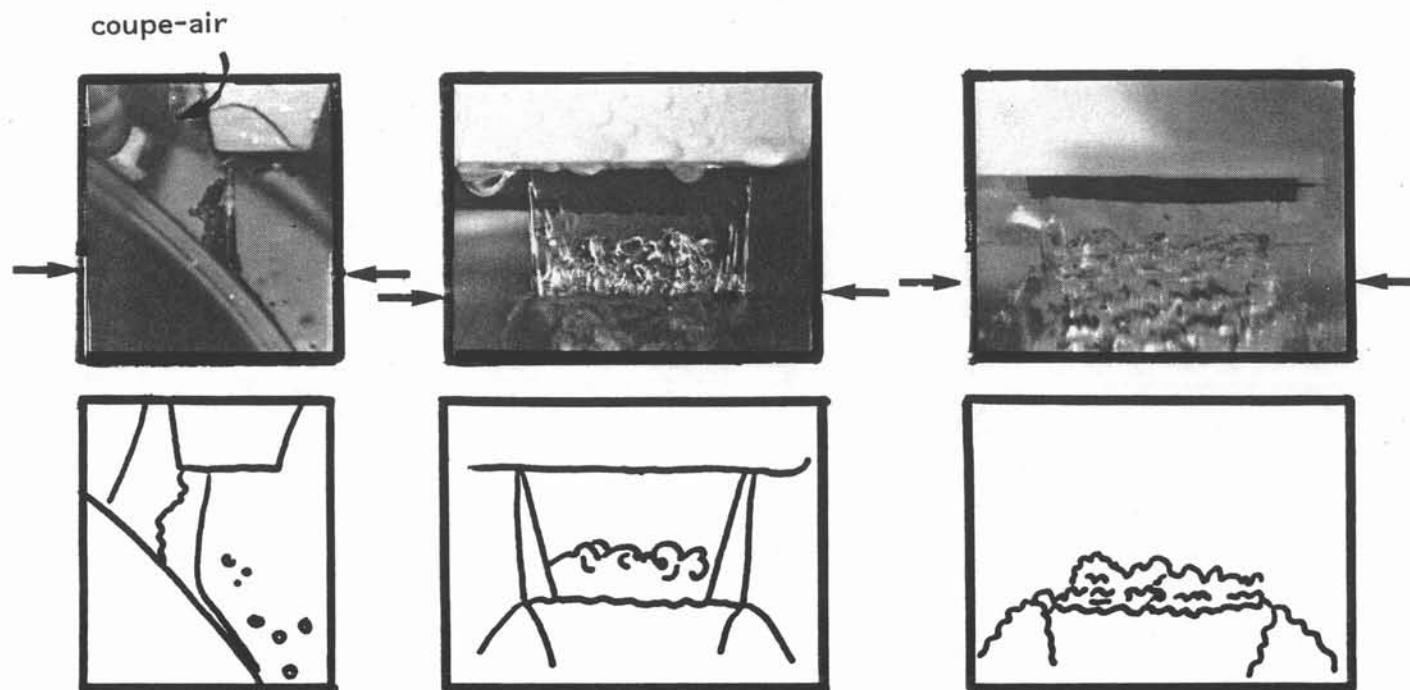
GEOMETRIE II

$V_r/U = 4,87$. Les structures du bouillonnement se sont affinées.
Le bouillonnement présente une forme triangulaire

GEOMETRIE III



$V_r/U = 17,0$. Le bouillonnement, décollé de la roue n'est plus visible vue de dessous.



$V_r/U = 17,0$. Grâce au coupe-air l'impact est plus stable et le bouillonnement est plaqué sur la lame incidente.

* La vue de côté peut être sujette à de mauvaises interprétations sur la forme du bouillonnement et sur la qualité du ruban élaboré.

La forme du bouillonnement que montre cette photo est une intégrale de tous les doigts formant le bouillonnement. Sur la photo aux basses vitesses de rotation la partie déviée inférieure du jet semble très perturbée car l'eau mouille très mal le plexiglass.

* La quantité de gouttes émises ainsi que leur diamètres ne peuvent pas être quantifiées sur ces photographies où seules les gouttes de fort diamètre apparaissent.

* Quatre phénomènes non encore expliqués ont été mis en évidence grâce à ces expériences :

1) Aux basses vitesses, le bouillonnement (3) passe périodiquement sous la lame incidente (1) et sous la partie déviée inférieure (4). La fréquence de ces battements a été mesurée sur des films vidéo et évaluée à 5 Hz. Cette fréquence est 10 fois plus élevée que celle issue des considérations sur la gravité (§ II.3.2.) L'erreur de mesure (\pm une image) est importante et deux explications de ce phénomène peuvent être avancées.

a/ les battements n'existent que pour les basses vitesses, leur fréquence peut accrocher celle des vibrations de la roue.

b/ La partie déviée supérieure du jet (3) constitue une masse d'eau qui, atteignant un certain poids rompt la "résistance" de la lame incidente (1) qui "cède" et autorise l'écoulement de l'eau.

2) Aux moyennes vitesses, la partie déviée supérieure adopte une forme en triangle :



Les cotés du triangle sont constitués de jets issus du pied des bourrelets. Lorsque la vitesse augmente, sous l'effet d'entraînement de l'air, ce triangle décolle de la roue, et vient, pour les très hautes vitesses, tout contre la lame incidente.

3) Aux grandes vitesses, des trainées plus claires existent sous la partie déviée inférieure (zone 4). Pour les mêmes conditions expérimentales, ces trainées bougent au cours du temps. Elles ne proviennent donc pas d'un défaut de la roue ou du racleur. Elles sont, sans doute dues à une inhomogénéité dans la lame incidente (1) dans l'injecteur.

4) Après étude de ces photos, toutes prises au 1/1000 s nous constatons que la longueur d'onde caractéristique de la perturbation axiale, perpendiculaire au sens de l'écoulement du liquide, est toujours comprise entre 3 et 4 mm. Ce même phénomène existe sur les films vidéo pris sous un éclairage stroboscopique dont la durée de l'éclair est 130 μ s. Nous ne connaissons aucune étude de stabilité de ce type d'écoulement et les études concernant la stabilité des écoulements tournants présentant une surface cylindrique (Pedley (60)) ne procure aucune explication de ce phénomène.

II.5.4 - Conclusions

Les configurations les plus adaptées au "melt spinning" sont celles qui présentent une géométrie semblable à la géométrie II. La présence d'un "coupe air" est recommandé pour stabiliser l'impact. Nous ignorons si ceci est possible en site industriel. Une analyse de similitude permet la transposition des résultats acquis sur la maquette à eau à un autre liquide. Cette analyse (44) prouve que la similitude entre l'eau et l'acier n'est pas complète. En effet, les facteurs d'échelle sur les vitesses et les longueurs issues des similitudes des nombres de Reynolds et de Froude sont

$$V_{\text{acier}} = 0,98 V_{\text{eau}}$$

$$l_{\text{acier}} = 0,95 l_{\text{eau}}$$

et

$$V_{\text{étain}} = 0,66 V_{\text{eau}}$$

$$l_{\text{étain}} = 0,43 l_{\text{eau}}$$

Sous ces conditions, les rapports de nombre de Weber sont :

$$\frac{W_{\text{acier}}}{W_{\text{eau}}} = 0,328 \quad \text{et} \quad \frac{W_{\text{étain}}}{W_{\text{eau}}} = 0,161$$

L'influence de la variation de la tension superficielle sur la forme de l'impact a été déterminée qualitativement de la façon suivante. Un agent mouillant, servant en photographie, a été ajouté à l'eau abaissant sa tension superficielle de moitié. Aucun changement significatif dans la forme de l'impact n'a été observé, mais toutes les structures constitutives de l'impact ont été affinées. En particulier, la taille des gouttelettes émises a fortement diminuée.

La tension superficielle, beaucoup plus élevée pour les métaux liquides que pour l'eau, a un effet stabilisant sur l'impact.

L'influence de la tension interfaciale entre le liquide et le substrat a pu être appréhendée par l'utilisation de deux roues : l'une en acier, l'autre en plexiglass. L'eau mouille moins bien le plexiglass que l'acier. L'abaissement de la tension interfaciale engendre :

- un léger déplacement des transitions entre les diverses géométries d'impact vers les petits rapports V_r / U .
- une régularité moins bonne des rives des parties (5).

Ces faits soulignent l'importance, bien connue, de la qualité du substrat sur les produits élaborés par un procédé de coulée directe.

Cette étude va être poursuivie en faisant varier :

- pour un injecteur donné la vitesse du jet incident,
- pour une vitesse débitante donnée, la largeur de la lame incidente, en tenant compte des limites imposées par la largeur de la roue.
- la qualité de la surface de la roue en acier.

Une étude détaillée des instabilités est en cours.

CHAPITRE III

LEVITATIONS

La plus impressionnante des possibilités offertes par les forces électromagnétiques est sans doute celle qui permet de maintenir sans contact, un objet électroconducteur à l'encontre des forces de pesanteur. Ce pouvoir de lévitation est, par exemple, en voie d'être utilisé sur des trains afin de supprimer les problèmes de roulements et d'axe de rotation aux grandes vitesses (61) ou aider à l'automatisation des réseaux.

Ce chapitre ne traite pas de la lévitation d'objets solides mais de domaines liquides.

Deux types de lévitation conventionnels sont illustrés dans ce qui suit. Le premier emploie des champs magnétiques alternatifs de fréquence élevée, le second un champ magnétique et un courant de conduction dans le métal, continus et perpendiculaires entre eux.

La lévitation électromagnétique en spires coniques, comme les procédés de type creusets froids qui en sont dérivés, servent à l'élaboration de métaux ou d'oxydes métalliques à forte valeur ajoutée. En effet, sous réserve de fournir la puissance nécessaire, l'emploi de champs magnétiques alternatifs autorise la fonte du matériau levité. L'absence de contact entre le matériau fondu et le "creuset" supprime la pollution du matériau fondu par inclusion de réfractaire, ceci est également le cas si le matériau entre en contact avec une paroi très refroidie. En outre, le brassage électromagnétique engendré par de tels champs favorise la décantation d'éventuelles inclusions (Garnier (35)) et permet d'améliorer la structure du matériau (raffinage de grains) afin de permettre son futur forgeage ou filage. Le paramètre caractéristique d'une telle lévitation est (§ 1.2.1) :

$$B_0^2/2\mu\rho gL$$

où B_0 est l'intensité caractéristique du champ magnétique appliqué et L la grandeur caractéristique du domaine levité.

La stabilité des charges lévitées (§ 1.3.4) dépend de la géométrie de l'inducteur : toute configuration présentant un axe de symétrie où, à la surface de la charge, seule la tension superficielle agit à l'encontre des forces de gravité, impose une limitation du volume qu'il est possible de leviter.

Le deuxième paragraphe de ce chapitre traite du problème de frontière libre en lévitation électromagnétique en spires coniques. Deux modèles, permettant le calcul de la surface libre d'une charge lévitée, sont exposés et leurs résultats comparés. Suit le calcul de la forme d'un ménisque de métal liquide centré sur un anneau inducteur, par une des deux méthodes précédentes. Le mouvement dans le bain n'est pas calculé.

Le troisième paragraphe présente une analyse de stabilité d'un domaine liquide, feuille ou barreau infini, levité par un champ magnétique et un courant électrique continu et perpendiculaires entre eux. Cette configuration, appliquée à la coulée continue horizontale, pourrait permettre la continuité du retrait du produit élaboré alors qu'aujourd'hui tous les procédés existants présentent des retraits intermittents.

Le problème de frontière libre en lévitation électromagnétique

*The problem of free boundary
 in electromagnetic levitation*

par

A. GAGNOUD, J. ETAY et M. GARNIER*

RÉSUMÉ. — Après un rappel des principes de la lévitation électromagnétique deux méthodes de calcul de surfaces de charge déformées sont proposées. L'une recherche la surface sur laquelle le saut des contraintes normales est constant, l'autre celle qui minimise la fonctionnelle d'énergie totale du système. Des comparaisons de ces deux méthodes sont exposées.

ABSTRACT. — The principles of the magnetic levitation of liquid metals are first recalled. Two methods of calculations of the melt surfaces are then formulated. One considers the surface where the jump of normal stress is constant, the other, the surface which minimises the functional of the total energy of the system. Comparisons between the two methods are made.

1. Introduction

L'exploitation des forces de répulsion entre un inducteur parcouru par un courant alternatif et un milieu conducteur de l'électricité, appelé aussi charge, permet la lévitation électromagnétique. Les premiers essais de ce procédé réalisés par Okress et coll. (1952) [1] ont mis en évidence la possibilité de fondre, purifier et homogénéiser des matériaux à haut point de fusion. En effet l'absence de contact entre le matériau à traiter et le creuset autorise la fusion d'éléments très réactifs.

Des calculs de forces de lévitation sur une charge sphérique ont été proposés par Fromm (1965) [2], Holmes (1978) [3] étudie la stabilité globale et Mestel (1982) [4] modélise le mouvement dans la charge. Sneyd et Moffatt (1982) [5] calculent la forme de la surface libre d'un tore lévité et les mouvements de brassage électromagnétique lorsque

* G.I.S. Madylam, B.P. n° 68, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex.

cette surface est circulaire. El Kaddah et Szekely (1983) [6] calculent le profil de température établi dans une gouttelette lévitées.

Lorsqu'on réalise la fusion d'un métal dans un creuset en spires coniques, la charge perd sa phéricité. Le brassage électromagnétique et la répartition de température sont alors différents de ceux déterminés pour une sphère.

Après un bref rappel sur l'effet de formage électromagnétique, des calculs de la forme d'équilibre de la surface d'une charge fondue sont présentés dans le cas où le champ magnétique ne pénètre pas dans la charge et dans le cas où il diffuse sur une faible épaisseur.

2. Formulation du problème

Lorsqu'un milieu Ω , de conductivité σ et de perméabilité magnétique μ , est mis en présence d'un champ magnétique alternatif \mathbf{B} de pulsation élevée ω , il développe des courants induits \mathbf{j} dans une couche limite superficielle, appelée peau électromagnétique d'épaisseur

$$\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}.$$

Ces courants induits engendrent une élévation de température dans la charge et permettent sa fusion. Leur interaction avec le champ magnétique crée une distribution de forces $\mathbf{F}(\mathbf{F}=\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})$ dans la couche périphérique. La partie irrotationnelle F_i de cette force, répulsion entre l'inducteur et le domaine Ω , est exploitée pour léviter ou former sans paroi des liquides électroconducteurs. La partie rotationnelle F_r crée le brassage électromagnétique du fluide. L'intensité relative de ces deux types de forces est liée à la pulsation ω , par l'intermédiaire du paramètre d'écran $R_\omega = \mu\sigma\omega a^2$ (où a est la longueur caractéristique de Ω).

$$\frac{|F_i|}{|F_r|} \sim (R_\omega)^{1/2} \sim a/\delta.$$

L'élévation de la fréquence ω conduit à l'intensification des forces irrotationnelles susceptibles de vaincre la gravité et de réaliser la lévitation électromagnétique.

La forme d'équilibre de la surface $\partial\Omega$ du volume levité Ω peut être trouvée soit à partir de l'équation locale d'équilibre de l'interface (constance du saut des contraintes normales à la surface), soit par la recherche du minimum de l'énergie totale du système constitué par la charge et les inducteurs.

L'expression du saut des contraintes normales à la surface a été formulée par Mestel (1982), sous la forme adimensionnelle suivante :

$$(1) \quad p_i - p_e = WK + \frac{1}{2} \alpha \operatorname{Re} \frac{\delta}{a} \mu_s^2 + \frac{1}{2} \alpha B_s^2 + z$$

où :

- p_e et p_i sont les pressions respectivement extérieure et intérieure à Ω , sur $\partial\Omega$;
- K est le rapport entre la courbure locale et le rayon a de la sphère de même volume que Ω ;
- B_s est le champ magnétique tangent à la surface rapporté à B_0 : champ caractéristique du système étudié. Si I est le courant circulant dans l'inducteur B_0 peut être pris égal à $\mu I/a$;
- u_s est la vitesse à la surface rapportée à U_0 vitesse caractéristique du fluide établie par

$$U_0 = \frac{B_0^2}{2\mu\rho} \frac{\delta}{v}$$

traduisant l'égalité locale dans une courbe superficielle de Ω des forces d'origine magnétique et visqueuse (v est la viscosité du fluide)

et :

- $W = \gamma/\rho g a^2$ est un nombre de Weber où :
 - γ est la tension superficielle entre le métal liquide occupant Ω et l'air,
 - ρ la masse volumique du métal liquide,
 - g l'accélération de la pesanteur;
- $Re = U_0 a/v$ est un nombre de Reynolds;
- $\alpha = B_0^2/2\mu\rho g a$.

Lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique δ est nulle, la partie rotationnelle des forces électromagnétiques s'annule, il n'y a pas de mouvement de brassage à l'intérieur de Ω et l'équation (1) devient

$$(2) \quad p_i - p_e = WK + \frac{1}{2} \alpha B_s^2 + z.$$

Toutefois, lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est faible mais non nulle, le terme $Re\delta/a$ qui est de l'ordre de δ^2 devient très petit devant l'unité et le saut des contraintes normales à la surface vérifie (2). La fonctionnelle correspondant à l'énergie totale du système s'exprime comme la somme des énergies magnétique, de pesanteur et de tension superficielle.

$$\Phi(\Omega) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overline{B^2}^t}{2\mu} dv + \int_{\Omega} \rho g z dv + \int_{\partial\Omega} \gamma dS$$

où \bar{X}^t désigne la moyenne temporelle de la grandeur X . La surface d'équilibre est celle qui minimise la fonctionnelle Φ .

Dans cet article deux méthodes permettent la détermination de la forme d'équilibre d'une charge lévité dans un inducteur conique (fig. 1) sont présentées. La première

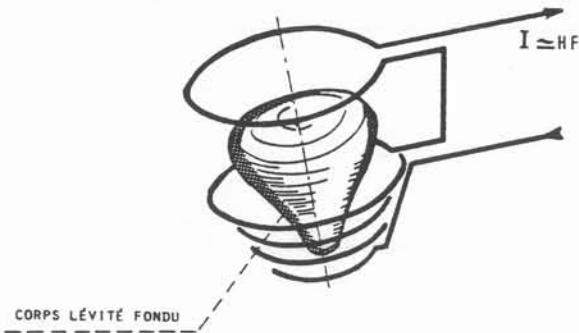


Fig. 1.

utilise la condition de la constance du saut des contraintes normales à la surface lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est nulle. La seconde, basée sur la minimisation de l'énergie, est développée dans le cas d'une épaisseur de peau très fine mais non nulle.

3. Calcul de la forme d'équilibre de la charge ($\delta=0$)

La méthode de calcul de forme de surface libre de la charge levitée par un inducteur à spires coniques présentée dans ce paragraphe a été proposée par A. J. Mestel dans son mémoire de thèse (1982) [7]. Elle a été modifiée par nos soins afin d'être plus proche du phénomène physique. En effet l'analyse de A. J. Mestel ne permet pas l'introduction directe de l'intensité inductrice I . Le facteur α est calculé de façon à ce que le centre de gravité reste fixe, pour un volume donné, lorsque la tension superficielle varie. D'autre part il faut, pour une raison de convergence du programme, que la charge à léviter soit dans une position proche de l'équilibre lors du début des calculs. Nous avons donc prévu un calcul initial analytique afin de situer une sphère en lévitation dans un inducteur conique. D'autres modifications ont été apportées en particulier au niveau du traitement numérique des équations afin de permettre l'extension de la méthode au calcul de la surface déformée d'un volume de métal liquide axisymétrique dont la frontière présente à la fois des parties solides et liquides (cas de l'élaboration de monocristaux par la technique de la zone flottante).

3. 1. POSITIONNEMENT DE LA CHARGE DANS LE CREUSET

Les calculs présentés dans ce paragraphe sont réalisés en coordonnées sphériques (r, θ, φ) centrées sur le centre de la charge considérée comme sphérique de rayon a . Nous introduisons une fonction potentiel χ du champ magnétique \mathbf{B} telle que :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \left(0, 0, \frac{\chi}{r \sin \theta} \right)$$

Dans le milieu extérieur à la charge, où $\sigma=0$ ce potentiel vérifie l'équation :

$$E^2(\chi)=0 \quad \text{avec} \quad E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

et $\chi=0$ sur $r=a$.

La solution générale de cette équation peut être trouvée par une exploitation du théorème de la sphère de Butler énoncé par exemple par Milne-Thomson (1968), p. 488 [8].

$$\chi = a^n r \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \left(\left(\frac{r}{a} \right)^n - \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right) P_n^1(\cos \theta)$$

assurant la nullité de χ à la surface de la charge où $r=a$. Les fonctions P_n^1 sont des fonctions de Legendre associées d'ordre n et de première espèce.

Les χ_n sont déterminés par la position des spires inductrices formant le creuset de lévitation, repérées par r_i et θ_i .

$$\chi_n = - \frac{\mu I}{2n(n+1)} r_i^{-n} \sin \theta_i P_n^1(\cos \theta_i)$$

valable pour $r < \min(r_i)$, I représente l'intensité algébrique du courant dans la spire considérée.

Le champ magnétique à la surface de la sphère est tangentiel :

$$B_\theta = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial r}$$

et

$$B_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n ((n+1)r^{n-1} + nr^{-(n+2)}) P_n^1(\cos \theta)$$

Nous pouvons ainsi calculer la force de lévitation agissant sur la sphère :

$$F_L = \int_{\Gamma} \frac{B_\theta^2}{2\mu} n_z(s) \cdot 2\pi R(s) dz$$

où Γ est la génératrice de Ω , et s est l'abscisse curviligne du point courant de cette génératrice.

$$R(s) = r(s) \sin \theta(s)$$

n_z : composante verticale de la normale extérieure à la sphère.

Par itérations successives le centre de la sphère est positionné de façon à ce que la force de lévitation équilibre le poids de la sphère. Alors la forme d'équilibre de la charge liquide, quand sa tension superficielle n'est pas infinie ($W = \infty$) est calculée.

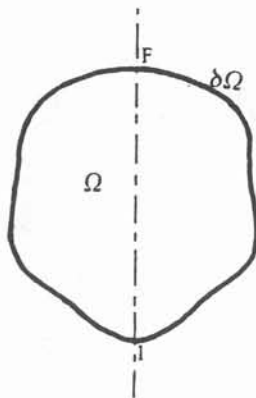


Fig. 2.

3. 2. RECHERCHE DE LA FORME D'ÉQUILIBRE

La constance du saut des contraintes normales à la surface libre s'écrit :

$$p_i - p_e = WK + \frac{1}{2} \alpha B_s^2 + z.$$

Au point I, situé sur l'axe de symétrie (fig. 2) où $z = z_I$ et $K = K_I$, le champ magnétique présente un point d'arrêt et la condition (2) s'écrit :

$$(3) \quad W(K - K_I) + (z - z_I) + \frac{1}{2} \alpha B_s^2 = 0.$$

La surface libre de la charge initialement sphérique est modifiée au cours du temps, jusqu'à ce qu'elle atteigne sa forme d'équilibre. Le potentiel Φ de la vitesse fictive induite par la déformation de la surface libre est introduit dans l'équation (3) qui devient :

$$\left. \frac{D\Phi}{Dt} \right|_s - \frac{1}{2} |\nabla \Phi|_s^2 + W(K - K_I) - (z - z_I) + \frac{1}{2} \alpha B_s^2 = 0$$

où D/Dt est la dérivée matérielle de Φ . Près de la position d'équilibre la vitesse de déplacement des points s'annule et $\nabla \Phi = 0$. Nous pouvons donc écrire :

$$(4) \quad \Phi_s(t + \Delta t) = \Phi_s(t) + \Delta t \left[W(K - K_I) + (z - z_I) + \frac{1}{2} \alpha B_s^2 \right].$$

D'autre part l'équation de continuité de la vitesse du fluide supposé parfait donne :

$$(5) \quad \nabla^2 \Phi = 0.$$

Le problème (5) avec la condition à la frontière (4) permet de trouver, pour chaque pas de temps la vitesse d'avance normale à la surface $\partial \Phi / \partial n|_s$. Celle-ci est alors définie

par :

$$R(t + \Delta t) = R(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_s \cdot n_R \cdot \Delta t$$

$$z(t + \Delta t) = z(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_s \cdot n_z \cdot \Delta t$$

où n_R et n_z sont les composantes de la normale extérieure \mathbf{n} à $\partial\Omega$ dans le repère cylindrique (R, φ, z) .

A chaque pas de temps le champ magnétique, les courbures et les normales sont alors calculés. Afin d'éviter un problème d'oscillations autour de la position d'équilibre nous introduisons un coefficient d'amortissement sur le potentiel Φ dans l'équation (4).

3.2.1. Résolution du problème

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Phi = \Phi_s & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce problème est résolu par une technique d'intégrales de surface. La deuxième égalité de Green s'écrit :

$$(6) \quad \iiint_{\Omega} (\Phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \Phi) dV = \iint_{\partial\Omega} \left(\Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS$$

Soit la fonction de Green :

$$\psi = [(z - z')^2 + R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \varphi]^{1/2}$$

qui correspond à une distribution de sources réparties sur la surface.

On note :

$$\hat{\psi}(R, z, R_s, z_s) = \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) = \int_0^{2\pi} \psi(R, z, R', z', \varphi) d\varphi.$$

Lorsque \mathbf{x} appartient à Γ l'identité (6) s'écrit :

$$(7) \quad \int_{\Gamma} R(\mathbf{x}_s) \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 2\pi \Phi(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \Phi_s(\mathbf{x}_s) R(\mathbf{x}_s) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial n} ds.$$

3.2.2. — Discrétisation des équations

Nous avons choisi une double discrétisation de la surface. La première discrétisation \mathbf{x}_i balaie la génératrice et $D_i = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}|$. La seconde est constituée des points milieux \mathbf{x}_i^* de chaque segment $[\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i]$. C'est en ces points que l'on calcule pour chaque pas de temps la valeur Φ_s et $\partial\Phi/\partial n|_s$. L'équation (7) s'écrit pour chaque \mathbf{x}_i^* :

$$\int_{\Gamma} R(\mathbf{x}_s) \hat{\psi}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i^*) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{x}_s) ds = 2\pi \Phi_s(\mathbf{x}_i^*) + \int_{\Gamma} \Phi_s(\mathbf{x}_s) R(\mathbf{x}_s) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial n}(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_s) ds$$

ou

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n R_j^* \hat{\psi}(x_j^*, x_i^*) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x_j^*) D_j + R_i^* \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x_i^*) \int_{i-1}^i \hat{\psi}(x_s, x_i^*) ds \\ &= 2\pi \Phi_s(x_i^*) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi_s(x_j^*) R(x_j^*) \left[\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial R}(x_i^*, x_j^*) n_R(x_j^*) + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}(x_i^*, x_j^*) n_z(x_j^*) \right] ds \\ & \quad + \Phi_s(x_i^*) R(x_i^*) \int_{i-1}^i \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial n}(x_s, x_i^*) ds \end{aligned}$$

Les problèmes de singularité posés par l'existence des termes

$$\int_{i-1}^i \hat{\psi}(x_s, x_i^*) ds \quad \text{et} \quad \int_{i-1}^i \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial n}(x_s, x_i^*) ds$$

sont résolus dans l'annexe 1.

Nous obtenons donc un système de n équations à n inconnues $\partial \Phi / \partial n|_j$:

$$i = [1, n], \quad A_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_j = S_i.$$

La matrice A_{ij} est à diagonale dominante.

3.2.3. Calcul du champ magnétique

A chaque pas de temps le champ magnétique, les normales et courbures à la surface libre doivent être calculés. Les normales et courbures, ainsi que les points x_i sont déterminés par utilisation de fonctions spline cubiques. Le calcul du champ magnétique se fait par une méthode d'intégrales aux frontières, analogue à celle utilisée pour déterminer la vitesse d'avance de la surface libre. La fonction de Green utilisée ici, représente une distribution d'anneaux vortex centrés sur l'axe de symétrie, et le domaine d'intégration considéré est l'espace extérieur à la charge.

Soit χ le potentiel du champ magnétique :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \left(0, \frac{\chi}{R}, 0 \right)$$

en coordonnées cylindriques (R, φ, z) .

L'équation de Maxwell-Ampère $(\nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j})$ s'écrit :

$$-j = D^2 \chi \quad \text{avec} \quad D^2 = R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

avec $\chi = 0$ à la surface.

La fonction de Green introduite pour résoudre ce problème représente le potentiel du champ magnétique créé par une spire de courant placée en R_0, z_0 .

$$(8) \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \varphi) = \frac{RR_0 \cos \varphi}{((z - z_0)^2 + R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \varphi)^{1/2}}$$

et

$$(9) \quad \hat{H} = \int_0^{2\pi} H(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \varphi) d\varphi.$$

La définition de D^2 permet d'écrire :

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^3 - \Omega} \left(\frac{H}{R^2} D^2 \chi - \frac{\chi}{R^2} D^2 H \right) dV = \iiint_{\mathbb{R}^3 - \Omega} \left(\frac{H}{R} \nabla^2 \left(\frac{\chi}{R} \right) - \frac{\chi}{R} \nabla^2 \left(\frac{H}{R} \right) \right) dV.$$

La deuxième identité de Green donne :

$$I = \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{H}{R} \left| \frac{\partial(\chi/R)}{\partial n} \right|_s - \frac{\chi}{R} \left| \frac{\partial(H/R)}{\partial n} \right|_s \right] ds$$

ainsi

$$- \iiint_{\mathbb{R}^3 - \Omega} \frac{H}{R} j dV + 4\pi\chi = \iint_{\partial\Omega} \frac{H}{R} \left| \frac{\partial(\chi/R)}{\partial n} \right|_s ds.$$

L'utilisation de l'axisymétrie du problème, en se situant sur la surface (où $\chi=0$), et le fait que sur $\mathbb{R}^3 - \Omega$ la répartition des courants inducteurs est discrète, conduisent à :

$$\sum_{c=1}^{N_c} \hat{H}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}) I_c = \int_{\Gamma} \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) B_s(\mathbf{x}_s) ds$$

Cette formule permet un calcul de B_s plus simple que celui de la détermination de $\partial\Phi/\partial n$ et se discrétise de la même façon.

4. Calcul de la forme d'équilibre de la charge ($\delta \neq 0$ et $R \omega \gg 1$)

La surface libre d'équilibre $\partial\Omega$ du domaine Ω est celle qui minimise la fonctionnelle d'énergie $\Phi(\Omega)$ correspondant à l'énergie totale du système :

$$(10) \quad \Phi(\Omega) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B^2}{2\mu} dv + \int_{\Omega} \rho g z dv + \int_{\partial\Omega} \gamma ds.$$

Le minimum est recherché avec la contrainte imposée de la conservation du volume de la charge. Cette approche variationnelle est équivalente à l'approche précédente pour $\delta=0$, mais elle est plus opérationnelle lorsque B est calculé en tenant compte des courants induits dans la peau électromagnétique.

4. 1. LA DÉRIVATION PAR RAPPORT AU DOMAINE

Les travaux de Séro-Guillaume (1983) ([9], [10], [11]) ont permis d'établir la dérivation par rapport au domaine de la fonctionnelle d'énergie Φ . Considérons l'application identité I de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 et θ un champ de déplacements de norme petite qui conserve le volume, l'application $I + \theta$ est alors un difféomorphisme. Soit Ω_0 un domaine, on note $\bar{\Phi}(\theta)$ l'expression de Φ correspondant à la transformée Ω de Ω_0 par le déplacement θ .

$$\Omega = (I + \theta) \Omega_0 \quad \text{et} \quad \bar{\Phi}(\theta) = \Phi(\Omega).$$

La dérivée de Φ par rapport au domaine en Ω_0 appliquée à un déplacement τ qui conserve le volume est définie comme la différentielle de Φ par rapport à θ pour $\theta=0$, soit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Omega}(\Omega_0) \cdot \tau = \left. \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \cdot \tau.$$

Séro-Guillaume a alors démontré [9] que la position d'équilibre est obtenue en Ω_0 si $\Phi(\Omega_0)$ est minimal, c'est-à-dire si pour tout déplacement τ admissible on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Omega}(\Omega_0) \cdot \tau = 0$$

4. 2. PRÉSENTATION DU MODÈLE

Lorsque $\delta=0$, la fonctionnelle d'énergie totale du système définie en (10) admet pour dérivée par rapport au domaine Ω vis-à-vis d'un déplacement τ conservant le volume :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Omega}(\Omega) \cdot \tau = \int_{\partial \Omega} \left\langle \left(\frac{B_e^2}{2\mu} + \rho g z + \gamma K \right) \mathbf{n}, \tau \right\rangle d\sigma$$

Où \mathbf{n} est la normale extérieure du domaine Ω , K la courbure locale de $\partial \Omega$, τ le champ de vecteurs correspondant au déplacement τ et $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

Choisissons le déplacement τ' défini sur $\partial \Omega$ par :

$$\tau' = - \left(\rho g z + \frac{B_e^2}{2\mu} + \gamma K \right) \mathbf{n}$$

Ce champ de vecteur correspond à la direction de plus grande pente pour Φ , mais ne conserve pas le volume; il faut donc prendre en compte la contrainte

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} dv = \text{Cte}$$

dont la dérivée par rapport au domaine s'écrit :

$$\frac{\partial V(\Omega)}{\partial \Omega}(\Omega) \cdot \tau' = \int_{\partial \Omega} \langle \tau' \cdot \mathbf{n} \rangle ds$$

Une nouvelle fonctionnelle $F(\Omega)$ est donc introduite :

$$F(\Omega) = \Phi(\Omega) + \lambda V(\Omega)$$

λ est un multiplicateur de Lagrange déterminé par

$$\int_{\partial \Omega} \langle \tau \cdot \mathbf{n} \rangle ds = 0$$

où τ est le champ de vecteur dans la direction de plus grande pente de $F(\Omega)$; τ s'écrit :

$$(11) \quad \tau = - \left(\rho g z + \frac{B_e^2}{2\mu} + \gamma K + \lambda \right) \mathbf{n}$$

Le point stationnaire de la dérivée de $F(\Omega)$ par rapport au domaine est recherché à l'aide de l'algorithme suivant :

Soit Ω_0 un domaine initial, après k déformations de la surface de la charge le domaine Ω_k est limité par la frontière $\partial \Omega_k$. Le domaine Ω_{k+1} est alors obtenu à partir de $\partial \Omega_k$ par le déplacement τ_{k+1} . Ainsi

$$\partial \Omega_{k+1} = \partial \Omega_k + \tau_{k+1}$$

avec

$$\tau_{k+1}(\mathbf{x}) = -\varepsilon \left(\rho g z + \frac{B_e^2}{2\mu} + \gamma K + \lambda \right)_k \mathbf{n}_k$$

où \mathbf{x} est un point de $\partial \Omega_k$, \mathbf{n}_k la normale extérieure au point \mathbf{x} de la frontière $\partial \Omega_k$, z la cote du point \mathbf{x} , B_e le champ efficace en \mathbf{x} , k la courbure moyenne en \mathbf{x} , ε un paramètre positif adaptable pour obtenir une forte décroissance de $F(\Omega)$.

$$\lambda = \frac{- \int_{\partial \Omega_k} (gz + (B_e^2/2\mu) + \gamma k) ds}{\int_{\partial \Omega_k} ds}$$

Alors

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} \cdot \tau_{k+1} < 0.$$

Le déplacement de $\partial \Omega_k$ effectué diminue l'énergie totale du système.

L'organigramme utilisé pour la détermination de la surface libre d'équilibre est donné en annexe 2.

4. 3. DÉTERMINATION DE L'ÉNERGIE MAGNÉTIQUE

Le calcul de l'énergie magnétique du système, nécessite à chaque itération, correspondant à une frontière $\partial\Omega_e$, la détermination du champ magnétique dans tout l'espace pour une intensité fixée dans l'inducteur. Ce calcul étant trop fastidieux, l'expression de l'énergie magnétique Φ_m est transformée.

Le calcul de \mathbf{B} est réalisé dans le cas d'une fine épaisseur de peau électromagnétique, \mathbf{B} est donc pratiquement tangent à la surface de la charge $\mathbf{B} \sim \mathbf{B}_t$, \mathbf{B} est nul dans la charge. L'énergie magnétique s'écrit alors :

$$\Phi_m = - \int_{\Omega_e} \frac{B^2}{2\mu}$$

où Ω_e est le domaine extérieur à la charge lévitée.

Une exploitation simple de la relation

$$\nabla \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \wedge \mathbf{A}$$

permet d'écrire

$$\Phi_m = - \int_{\Omega_e} \frac{\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \rangle}{2} dv + \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{B} \wedge \mathbf{A})}{2\mu} \cdot \mathbf{n} ds$$

où \mathbf{A} est le potentiel vecteur du champ magnétique et \mathbf{J} la densité de courant, qui dans Ω_e n'est différente de zéro que dans le circuit inducteur.

Ainsi

$$\int_{\Omega_e} \frac{\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \rangle}{2} dv = \int_{\text{inducteur}} \frac{\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \rangle}{2} dv = \sum_{k=1}^{Nl} \frac{A_k^c I_k^c}{2} \pi R_k$$

où R_k désigne le rayon de la spire k de l'inducteur, I_k le courant qui la parcourt, I_k^c est le complexe conjugué de I_k et A_k^c le potentiel vecteur complexe créé sur la spire k de l'inducteur.

De plus

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{B} \wedge \mathbf{A})}{2\mu} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{R}_e(\mathbf{B}^c \wedge \mathbf{A}^c)}{4\mu} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \frac{\pi}{2\mu} \int_{\Gamma} \langle \mathbf{R}_e(\mathbf{B}^c \wedge \mathbf{A}^c) \cdot \mathbf{n} \rangle R ds \\ &\quad \text{generatrice} \end{aligned}$$

$R_e(B^c)$ est la partie réelle de B^c .

$$\Phi_m = - \sum_{k=1}^{NI} \frac{A_k I_k^c}{2} \pi R_k - \frac{\pi}{2\mu} \int_{\Gamma} \langle R_e(B^c \wedge A^c) \cdot n \rangle R ds$$

Cette nouvelle expression de l'énergie magnétique nécessite uniquement la connaissance de la distribution du courant et du potentiel vecteur dans les conducteurs et du champ magnétique à la frontière $\partial\Omega$.

— Modèle électromagnétique

Le modèle choisi est adapté à la condition de fine épaisseur de peau électromagnétique. La configuration est supposée axisymétrique, l'hélicité de l'inducteur est négligée. Le champ magnétique diffuse dans l'épaisseur de peau électromagnétique δ . δ étant petit devant λ l'équation de diffusion du champ magnétique dans la charge est réduite, grâce à une approximation du type couche limite à

$$i\omega\mu\sigma B^c = \frac{\partial^2 B^c}{\partial n_i^2}$$

où B^c est le champ magnétique complexe de partie réelle $B = B_0 \cos(\omega t + \gamma)$, $i^2 = -1$ et n_i est la normale interne à la frontière $\partial\Omega$.

La géométrie du système étudié étant à symétrie de révolution, les densités de courant induit J dans la charge sont purement azimutales et vérifient la même équation de diffusion qui admet pour solution :

$$(12) \quad J^c = J_0^c e^{-(1+i)n_i/\delta}$$

où J^c est la valeur complexe associée à J de valeur J_0^c sur $\partial\Omega$.

La modélisation électromagnétique choisie consiste en la discrétisation de la génératrice Γ (fig. 3) de la surface $\partial\Omega$ en un ensemble de N éléments de longueur curviligne identique correspondant à un ensemble de spires coaxiales dans lesquelles la densité de courant décroît exponentiellement (12) suivant la normale intérieure à $\partial\Omega$.

La loi d'Ohm

$$J = \sigma E$$

avec

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

s'exprime, du fait de l'axisymétrie qui impose $\text{grad } V = 0$, sous la forme :

$$J^c = -i\sigma\omega A^c.$$

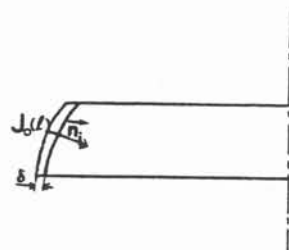
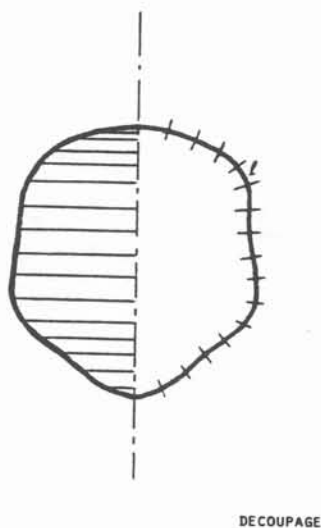


Fig. 3.

Le potentiel vecteur créé au point R, z par une spire filiforme, parcourue par le courant I , de rayon α et placée à la cote β est :

$$(13) \quad A = \frac{\mu \cdot I}{\pi} f(\alpha, \beta, R, z)$$

avec

$$(14) \quad f(\alpha, \beta, R, z) = \sqrt{\frac{\alpha}{m R}} \left[\left(1 - \frac{m}{2} \right) E_2(m) - E_1(m) \right]$$

et

$$m = 4 \alpha R / [(R + \alpha)^2 + (\beta - z)^2]$$

où $E_1(m)$ et $E_2(m)$ sont les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèces.

On remarque que : $\hat{H} = R \cdot f$ où \hat{H} est définie en (8) et (9) et f en (13) et (14).

Le potentiel vecteur créé par la spire l de taille finie s'en déduit :

$$A^c = \frac{\mu}{\pi} \int \int_{s, n_i} J_0^c(s) f(\alpha, \beta, R, z) e^{-(1+i)n_i/\delta} ds dn_i$$

(abscisse curviligne
et distance à la paroi)
de la spire l

f est une expression polynomiale dont la variation suivant la normale à $\delta\Omega$ est plus lente que $e^{-(1+i)n_i/\delta}$. Nous pouvons donc séparer les deux intégrations.

$$A^c = \frac{\mu}{\pi} \int_{n_i} e^{(1+i)n_i/\delta} dn_i \int_s J_0^c(s) f(\alpha, \beta, R, z)_{n_i=0} ds$$

De plus $J_0(s)$ est pris constant à la surface de chaque spire élémentaire l , si bien que :

$$A^c = \frac{\mu \cdot \delta}{\pi(1+i)} J_0^c(l) \int_{\text{spire } l} f(\alpha, \beta, R, z)_{n_i=0} ds.$$

L'intégrale est calculée numériquement par la méthode des trapèzes. Le potentiel vecteur créé par l'inducteur et la charge s'exprime comme une combinaison linéaire du courant inducteur I et des densités de courant induit $J_0^c(l)$ à la surface des spires élémentaires de la charge.

La distribution des courants induits est solution d'un système d'équations linéaires. Le potentiel vecteur et le champ magnétique s'en déduisent aisément.

Pour éviter les singularités qui apparaissent dans l'expression de $f(\alpha, \beta, r, z)$ aux points de séparation des spires lors du calcul de l'énergie, une double discrétisation de la génératrice est nécessaire.



| premier découpage en spires de courant pour calculer A et B , * deuxième découpage délimitant les spires de l'intégration de $B \wedge A$.

A chaque itération la détermination de la courbure locale, des normales externes et le calcul du volume sont effectués comme dans le modèle ($\delta=0$) après un lissage de la surface libre à l'aide de fonctions spline cubiques.

5. Présentation des résultats

Les deux paramètres adimensionnels caractéristiques du problème étudié sont :

$$W = \frac{\gamma}{\rho g a^2} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\mu I^2}{\rho g a^3}$$

Il peut être intéressant, dans certains cas, de préférer à l'un d'eux le rapport $\beta = \alpha/W$ soit $\beta = \mu I^2 / \gamma a$.

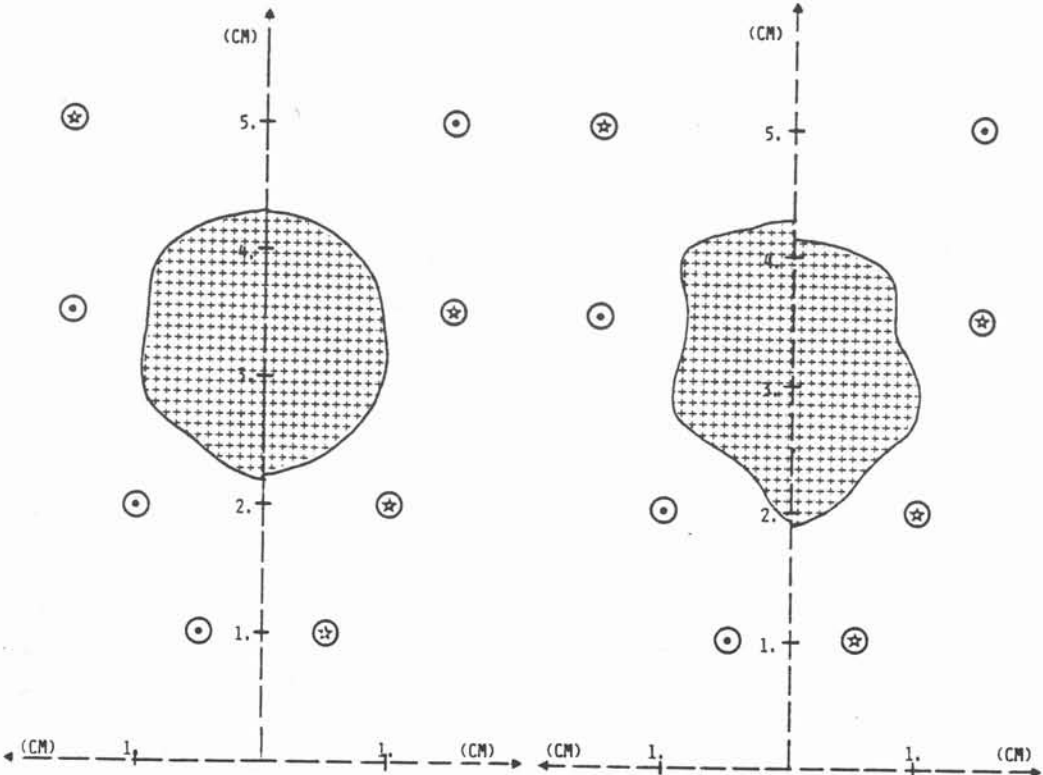
La signification de chacun des paramètres est la suivante pour un matériau donné de volume fixé :

- W , le nombre de Weber peut être considéré comme le rapport, au point le plus bas de la charge entre les forces antagonistes de tension superficielle et de poussée hydrostatique (seules en présence lorsque $\delta=0$). Lorsque W diminue, la charge liquide a tendance à s'écouler le long de l'axe de l'inducteur;
- α caractérise l'importance de l'effet de lévitation. Ce paramètre traduit en effet l'intensité relative des forces électromagnétiques qui s'exercent sur la charge, par rapport au poids de celle-ci;
- β définit un critère de déformation de la charge. Il traduit la compétition entre les forces de tension superficielle qui tendent à rendre la charge sphérique et les forces électromagnétiques non uniformes.

Les figures 4, 5, 6 et 7 illustrent quelques résultats typiques obtenus par les deux méthodes exposées. Les exemples présentés concernent pour les trois premières figures les cas $\delta/a=0$ (partie gauche de la figure) et $\delta/a=0,07$ (partie droite de la figure) ainsi que les cas $\delta/a=0,04$ et $\delta/a=0,07$ pour la figure 7). La valeur des paramètres physiques choisis et des paramètres adimensionnels correspondants est donnée dans le tableau suivant pour une charge de rayon équivalent $a=10^{-2}$ m, de masse volumique $\rho=10^4$ kg/m³ lévité dans le champ de pesanteur $g=10$ m/s².

La diminution forte de W entre la figure 4 et les figures 5 et 6, se traduit par une géométrie de la charge qui s'éloigne de la sphère. On note l'apparition d'un allongement de la charge vers le bas, amorce de l'écoulement obtenu pour des valeurs plus faibles de ce paramètre.

Une différence apparaît dans la comparaison des formes d'équilibre correspondant à $\delta/a=0$ et $\delta/a=0,07$ qui illustre l'influence du paramètre fréquence. Lorsque $\delta=0$ (fréquence infinie) le champ magnétique qui présente un point d'arrêt à la base de la charge, n'apporte aucune contribution à la lévitation. Par contre, lorsque l'épaisseur de peau augmente tout en restant faible devant a , bien que ce point d'arrêt disparaisse la force de lévitation au point bas de la charge est nulle. Ceci est dû à l'hypothèse sur l'axisymétrie du problème. Toutefois au voisinage de ce point d'arrêt les forces de lévitation sont plus élevées que lorsque le champ ne pénètre pas dans la charge, car la courbure locale du champ magnétique est moindre. Cette contribution est mise en évidence sur les figures 4, 5 et 6 où le rayon de courbure de la surface libre au bas de la charge est plus faible dans le cas $\delta=0$ que dans le cas $\delta=0,07$. A cet égard, la figure 7 est très expressive puisqu'une augmentation de la fréquence conduit le point le plus bas de la charge à



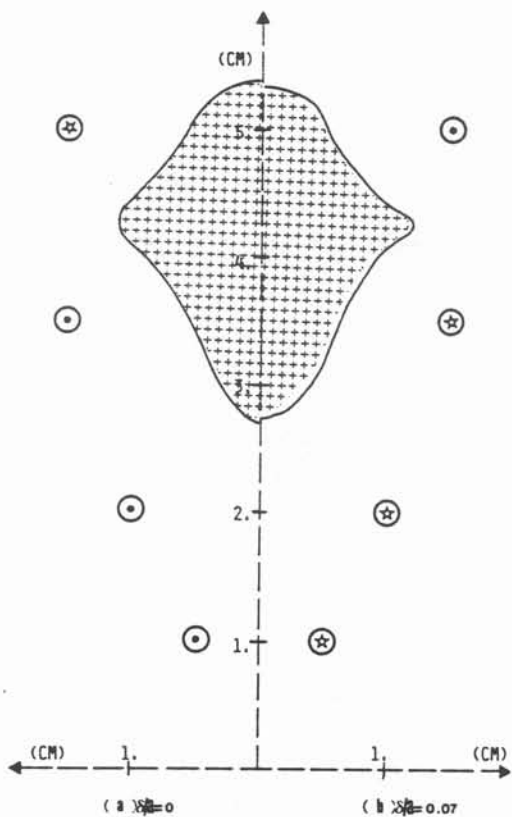
(a) $\gamma_0 = 0$ (b) $\gamma_0 = 0.07$
INTENSITE EFFICACE DU COURANT INDUCTEUR: 1070A
TENSION SUPERFICIELLE: 10. N/M

Fig. 4

(a) $\gamma_0 = 0$ (b) $\gamma_0 = 0.07$
INTENSITE EFFICACE DU COURANT INDUCTEUR: 1070 A
TENSION SUPERFICIELLE: 0.1 N/M

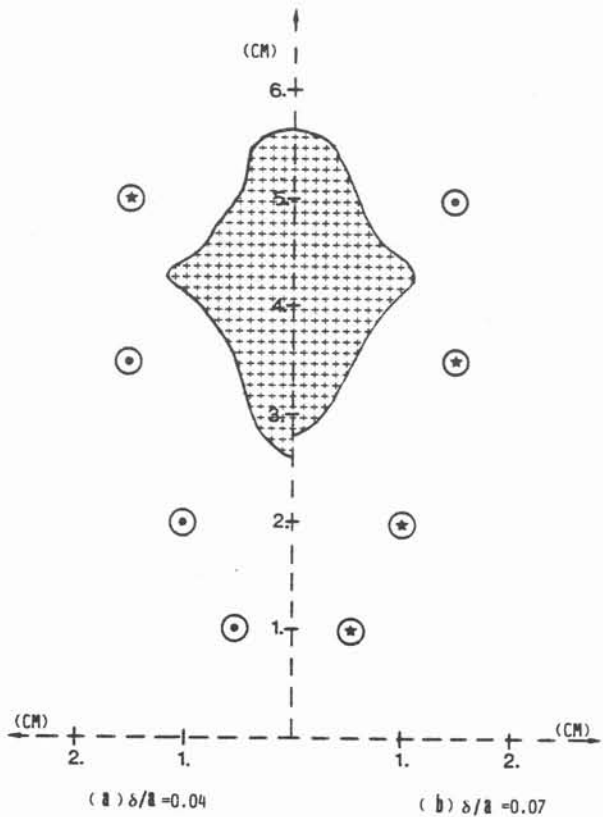
Fig. 5

	W	α	β
Figure 4 :			
I = 1 070 A.....	1	14	14
$\gamma = 10$ N/m.....			
Figure 5 :			
I = 1 070 A.....	10^{-1}	14	140
$\gamma = 0,1$ N/m.....			
Figure 6 :			
I = 2 100 A.....	10^{-1} 54	54	540
$\gamma = 0,1$ N/m.....			
Figure 7 :			
I = 2 830 A.....	$5 \cdot 10^{-1}$	100	200
$\gamma = 0,5$ N/m.....			



INTENSITE EFFICACE DU COURANT INDUCTEUR: 2100 A
TENSION SUPERFICIELLE: 0,1 N/M

Fig. 6



INTENSITE EFFICACE DU COURANT INDUCTEUR: 2830A
TENSION SUPERFICIELLE: 0,5 N/M

Fig. 7

descendre et le rayon de courbure local à diminuer de façon à compenser la réduction des forces électromagnétiques par l'accroissement des forces de tension superficielle.

Sur les figures 4 et 5, le centre de gravité de la charge lévitée est situé à des côtes très voisines (valeur identique α). Sur la figure 6, l'effet de lévitation est fortement accentué par l'accroissement de α et le centre de gravité de la charge, limitée dans son ascension par la répulsion de la contrespire, est localisé nettement plus haut.

Le paramètre β , qui caractérise l'écart géométrique de la surface libre, par rapport à la sphère, croît de la figure 4 à la figure 6. Il s'ensuit une déformation plus accentuée de la charge et l'apparition de rayons de courbure de plus en plus petits.

La figure 5 met en évidence un effet caractéristique de la fréquence. Pour une intensité fixée dans l'inducteur, la résultante des forces électromagnétiques est plus élevée dans le cas $\delta=0$ que dans le cas où les forces sont réparties dans l'épaisseur de peau : le « rendement » du système vis-à-vis de l'effet global de lévitation est d'autant meilleur

que δ est plus faible. Ceci se traduit par une position plus élevée du centre de gravité de la charge dans le cas d'une épaisseur de peau nulle. Cet effet qui existe également dans les cas considérés sur les figures 4 et 6 est dissimulé à cause de la prédominance des effets de tension superficielle (fig. 4) et de l'effet de la contrespire (fig. 6) qui réduisent fortement les degrés de liberté de la charge en équilibre.

Les formes d'équilibre obtenues par les deux méthodes sont en bonne concordance. Quelques différences apparaissent toutefois, notamment dans la courbure locale qui trouvent leur origine dans les méthodes utilisées. Dans le modèle exploité dans le cas où l'épaisseur de peau est nulle, l'expression de la courbure intervient, contrairement au modèle utilisant la minimisation de l'énergie, directement dans la condition d'équilibre de la surface libre. La courbure est calculée à partir des points de la surface discrétisée par une méthode d'interpolation basée sur l'utilisation de fonctions spline cubiques, dont la précision, surtout en ce qui concerne les points situés sur l'axe de symétrie, n'est pas excellente. Cette source d'imprécision qui apparaît dans la condition limite pour le modèle considérant une épaisseur de peau nulle influe sur les résultats. Par contre dans le modèle prenant en compte des épaisseurs de peau finies, la courbure n'intervient pas de façon aussi déterminante sur la précision de la solution. En effet dans le calcul de l'énergie totale, l'intégration sur toute la surface supprime l'effet de l'imprécision du calcul de la courbure locale qui n'apparaît que dans le calcul du déplacement de la surface libre au terme de chaque itération.

Chacune des deux méthodes nécessite l'ajustement de coefficients qui ont une influence sur la rapidité de convergence. Dans le modèle utilisant la minimisation de l'énergie le paramètre ε coefficient multiplicateur du déplacement, permet en limitant les déformations à chaque itération, de préserver la constance du volume. Il interdit de ce fait de faire apparaître les situations critiques dans lesquelles le volume levité se sépare en deux parties, lorsque la charge commence à s'écouler par exemple. Le modèle exploité dans le cas d'une épaisseur de peau nulle nécessite l'ajustement du pas de temps Δt et du coefficient d'amortissement limitant les oscillations de la surface libre. Ce double choix, très délicat, est déterminant pour la rapidité de convergence vers la solution et pour la convergence elle-même.

6. Conclusion

Deux modèles permettant le calcul de la surface libre d'un liquide électroconducteur levité dans un inducteur en spires coniques ont été présentés. Ils prennent en compte les effets de pesanteur, de tension superficielle et des forces électromagnétiques lorsque l'épaisseur de peau électromagnétique est faible. Ces modèles sont applicables à de nombreuses situations rencontrées dans les procédés métallurgiques comme le formage électromagnétique des métaux liquides, la lévitation en creuset froid, l'élaboration des monocristaux par la technique de la zone flottante.

Chacun d'eux présente des avantages distincts à prendre en compte dans le choix du modèle à utiliser pour résoudre un problème donné. La première méthode nécessite le calcul et l'inversion de deux matrices à chaque itération, la seconde l'inversion d'une

seule matrice complexe de même taille que les précédentes. Le calcul des grandeurs électromagnétiques est plus rapide avec le premier modèle. La déformation de la surface libre qui se fait suivant la plus grande pente de l'énergie totale obtenue par la deuxième méthode permet une convergence plus rapide que celle résultant des oscillations de la surface libre autour de sa position d'équilibre.

La connaissance de la géométrie de la frontière libre permettra une meilleure détermination des champs de vitesse et de température au sein de la charge lévité. Ceci suppose cependant que la perturbation du champ de pression interne à la charge induite par le champ de vitesse soit faible devant la pression magnétique ou la pression relative à la tension superficielle. Cette hypothèse est parfaitement vérifiée dans le cas d'une épaisseur de peau nulle où la partie rotationnelle des forces électromagnétiques est nulle. Elle doit être remise en question dans certains cas. Par exemple lorsque la peau électromagnétique cesse d'être très fine devant la dimension caractéristique de la charge et que les forces rotationnelles deviennent comparables aux forces irrotationnelles. De plus des effets Marangoni peuvent exister. Ils sont créés par des variations de tension superficielle engendrées par de forts rayons de courbure ou par un chauffage superficiel différentiel dû aux courants induits. Ces effets sont susceptibles d'introduire des vitesses de surface importantes, capables de modifier l'équilibre local, et donc la forme, de la surface. La prise en compte de ces couplages nouveaux dans la résolution du problème de frontière libre est possible par des modèles dérivés des modèles présentés. Il est clair cependant que le nombre d'itérations pour atteindre la solution serait fortement accru et les conditions de convergence deviendraient très délicates et difficiles à maîtriser.

ANNEXE 1

A. 1. Recherche de la valeur singulière de $\hat{\psi}$ lorsque $x_s(R, z)$ de $x^*(R_i^*, z_i^*)$ est au voisinage de x_i^*

$$\hat{\psi} = 2 \int_0^\pi \left[(R - R_i^*)^2 + (z - z_i^*)^2 + 4RR_i^* \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]^{-1/2} d\varphi$$

Cette intégrale est calculée entre 0 et K et entre K et π . Lorsque $0 \leq \varphi \leq K$, la variable φ^* telle que $\varphi = \varepsilon \varphi^*$ est introduite, où

$$\varepsilon = [(z - z_i^*)^2 + (R - R_i^*)^2]^{1/2}$$

est la distance entre les points x^* et x_i^* .

La première intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^{K/\varepsilon} \frac{\varepsilon d\varphi^*}{(\varepsilon^2 + RR_i^* \varepsilon^2 \varphi^{*2})^{1/2}} &= \frac{1}{\sqrt{RR_i^*}} \left(\text{Log} \sqrt{RR_i^*} \frac{K}{\varepsilon} + \left(1 + RR_i^* \frac{K^2}{\varepsilon^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{RR_i^*}} \text{Log} \frac{\sqrt{RR_i^*}}{\varepsilon} + \text{Log} K \end{aligned}$$

La deuxième intégrale se calcule simplement :

$$\int_K \frac{d\varphi}{2\sqrt{RR_i^*} \sin(\varphi/2)} = -\frac{1}{\sqrt{RR_i^*}} (\text{Log } K - \text{Log } 4)$$

$$\hat{\psi} \sim \frac{2}{\sqrt{RR_i^*}} \text{Log} \frac{2\sqrt{RR_i^*}}{\varepsilon} \quad \text{avec } \varepsilon = |x_s - x_i^*|.$$

La fonction $\hat{\psi}$ présente donc une singularité logarithmique au point x_i^* .

De même nous pouvons évaluer :

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} = \frac{2}{\varepsilon^2 \sqrt{RR_i^*}} (R_i^* - R) + \frac{1}{4(RR_i)^{3/2}} \left(\frac{3}{2}R + \frac{5}{2}R_i^* - (R + 3R_i^*) \text{Log} \frac{8\sqrt{RR_i^*}}{\varepsilon} \right)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = \frac{2}{\varepsilon^2 \sqrt{RR_i^*}} (z_i^* - z) + \frac{(z_i^* - z)}{4(RR_i)^{3/2}} \left(-\frac{3}{2} + \text{Log} \frac{8\sqrt{RR_i^*}}{\varepsilon} \right)$$

et

$$\hat{H} = \frac{2}{\sqrt{RR_i^*}} \left[\text{Log} \frac{8\sqrt{RR_i^*}}{2} - 2 \right]$$

A. 2. Calcul des intégrales $\int_{i-1}^i \hat{\psi}(x, x_i) ds$ et $\int_{i-1}^i (\partial \hat{\psi} / \partial n)(x, x_i) ds$

Les singularités à lever sont en $\text{Log } \varepsilon$ et en $1/\varepsilon^2$, tous les autres termes sont finis.

A. 2. 1. CALCUL DE $\int_{i-1}^i \text{Log } \varepsilon ds$

Cette intégrale est calculée grâce à la formule

$$\int \text{Log } Z dZ = Z \text{Log } Z - Z$$

où Z est pris tel que :

$$Z = (R - R_i^*) + i(z - z_i^*)$$

alors

$$\varepsilon = |Z| \quad \text{et} \quad dZ = e^{i\alpha} ds \quad \text{avec} \quad \alpha = \text{Artg} \frac{R_i - R_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}$$

et donc

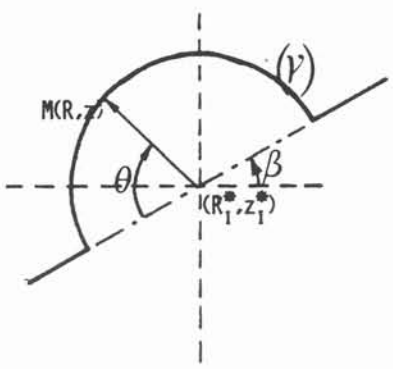
$$\int_{i-1}^i \text{Log } \varepsilon ds = R_e [e^{-i\alpha} (Z_2 \text{Log } Z_2 - Z_2 - Z_1 \text{Log } Z_1 + Z_1)]$$

avec

$$\begin{aligned} Z_1 &= (R_{i-1} - R_i^*) + i(z_{i-1} - z_i^*) = Z(x_{i-1}) \\ Z_2 &= (R_{i+1} - R_i^*) + i(z_{i+1} - z_i^*) = Z(x_i) \end{aligned}$$

A. 2. 2. CALCUL DE $\int_{i-1}^i ((R - R_i^*) n_R + (z - z_i^*) n_z) / \varepsilon^2 ds$

L'intégrale peut être décomposée comme une partie régulière notée \int_{i-1}^i et une partie singulière évaluée sur un petit arc de cercle (γ) de rayon γ centré sur x_j^* : $\int_{(\gamma)}$ suivant le schéma suivant :



$$R(M) = R_i^* + \gamma \sin(\theta - \beta)$$

$$z(M) = z_i^* - \gamma \sin(\theta - \beta)$$

$$ds = \gamma d\theta$$

$$n = (n_R, n_z)$$

$$\begin{cases} n_R = \sin(\theta - \beta) \\ n_z = -\cos(\theta - \beta) \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} \frac{(R - R_i^*) n_R + (z - z_i^*) n_z}{\varepsilon^2} ds = \int_0^\pi \frac{\gamma \sin^2(\theta - \beta) + \gamma \cos^2(\theta - \beta)}{\gamma^2} \gamma d\theta = \pi$$

$$\begin{aligned} z - z_i^* &= \eta(t) \\ R - R_i^* &= \xi(t) \end{aligned} \quad \text{et} \quad v = \frac{\eta(t)}{\xi(t)}$$

alors

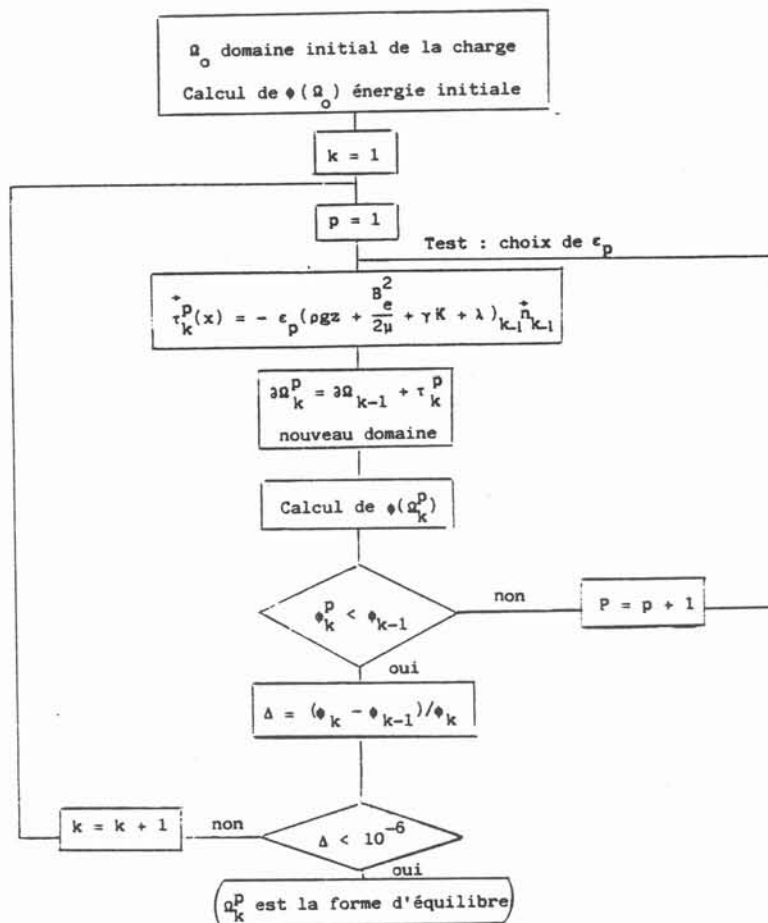
$$\int_{i-1}^i \frac{(R-R_i^*) n_R + (z-z_i^*) n_z}{\varepsilon^2} ds = \int_{i-1}^i \frac{dv}{(1+v^2)} = [\text{Artg } v]_{i-1}^i$$

$$= \text{Artg } \frac{z_i - z_i^*}{R_i - R_i^*} - \text{Artg } \frac{z_{i-1} - z_i^*}{R_{i-1} - R_i^*}$$

cette valeur est très proche de zéro.

ANNEXE 2

L'organigramme utilisé pour la détermination de la surface libre d'équilibre est le suivant :



BIBLIOGRAPHIE

- [1] OKRESS, E. C. WROUGHTON D. M., COMENETZ G., BRACE P. H. et KELLY J. C. R., *Electromagnetic Levitation of Solid and Molten Metals* (J. Applied Physics, vol. 23, n° 5, 1952, p. 545).

- [2] FROMM E. et JEHN H., *Electromagnetic Forces and Power Absorption in Levitation Melting* (Brit. J. Applied Physics, vol. 16, 1965).
- [3] HOLMES L. M., *Stability of Magnetic Levitation* (J. Applied Physics, vol. 49, n° 6, 1978, p. 3102).
- [4] MESTEL A. J., *Magnetic Levitation of Liquid Metals* (J. Fluid Mech., vol. 117, 1982, p. 23).
- [5] SNEYD A. D. et MOFFATT H. K., *Fluid Dynamical Aspects of the Levitation-Melting Process* (J. Fluid Mech., vol. 117, 1982, p. 45).
- [6] EL-KADDAH N. et SZEKELY, *The Electromagnetic Force Field, Fluid Flow Field, and Temperature Profiles in Levitated Metal Droplets* (Metallurgical Transactions B, vol. 14 B, 1983, p. 401).
- [7] MESTEL A. J., *Magnetic Levitation of Liquid Metals* (Thesis D.A.M.T.P., Cambridge University, 1982).
- [8] MILNE-THOMSON L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, 5th Edition, The Macmillan Press Ltd, 1968.
- [9] SERO-GUILLAUME, *Sur l'équilibre des ferrofluides et des métaux liquides* (Thèse de Docteur d'État, Nancy, 1983).
- [10] BRANCHER J. P. et SERO-GUILLAUME O., *Sur l'équilibre des liquides magnétiques, application à la magnétostatique* (J.M.T.A., vol. 2, n° 2, 1983, p. 265).
- [11] BRANCHER J. P., ETAY J. et SERO-GUILLAUME O., *Formage d'une lame métallique liquide. Calculs et expérience* (J.M.T.A., vol. 2, 1983, p. 977).

(Manuscrit reçu le 19 décembre 1985
 accepté le 6 mai 1986.)

III.2 - CALCUL DE LA SURFACE LIBRE D'UN MENISQUE AXISYMETRIQUE DE METAL LIQUIDE CENTRE SUR UN ANNEAU INDUCTEUR

III.2.1 - Zone fondue

Le procédé métallurgique dit de la zone fondue est employé pour obtenir des monocristaux de métaux conducteurs ou semi-conducteurs, comme le silicium. Il consiste à fondre, grâce à un faisceau circulaire d'électrons ou à un inducteur annulaire parcouru par un courant électrique radiofréquence, une tranche d'un cylindre de métal (barreau d'alimentation). L'anneau est déplacé le long de ce cylindre, ce qui permet de le refondre entièrement autant de fois qu'il est nécessaire à l'évacuation des impuretés. Le monocristal élaboré et la barre d'alimentation subissent une rotation différentielle.

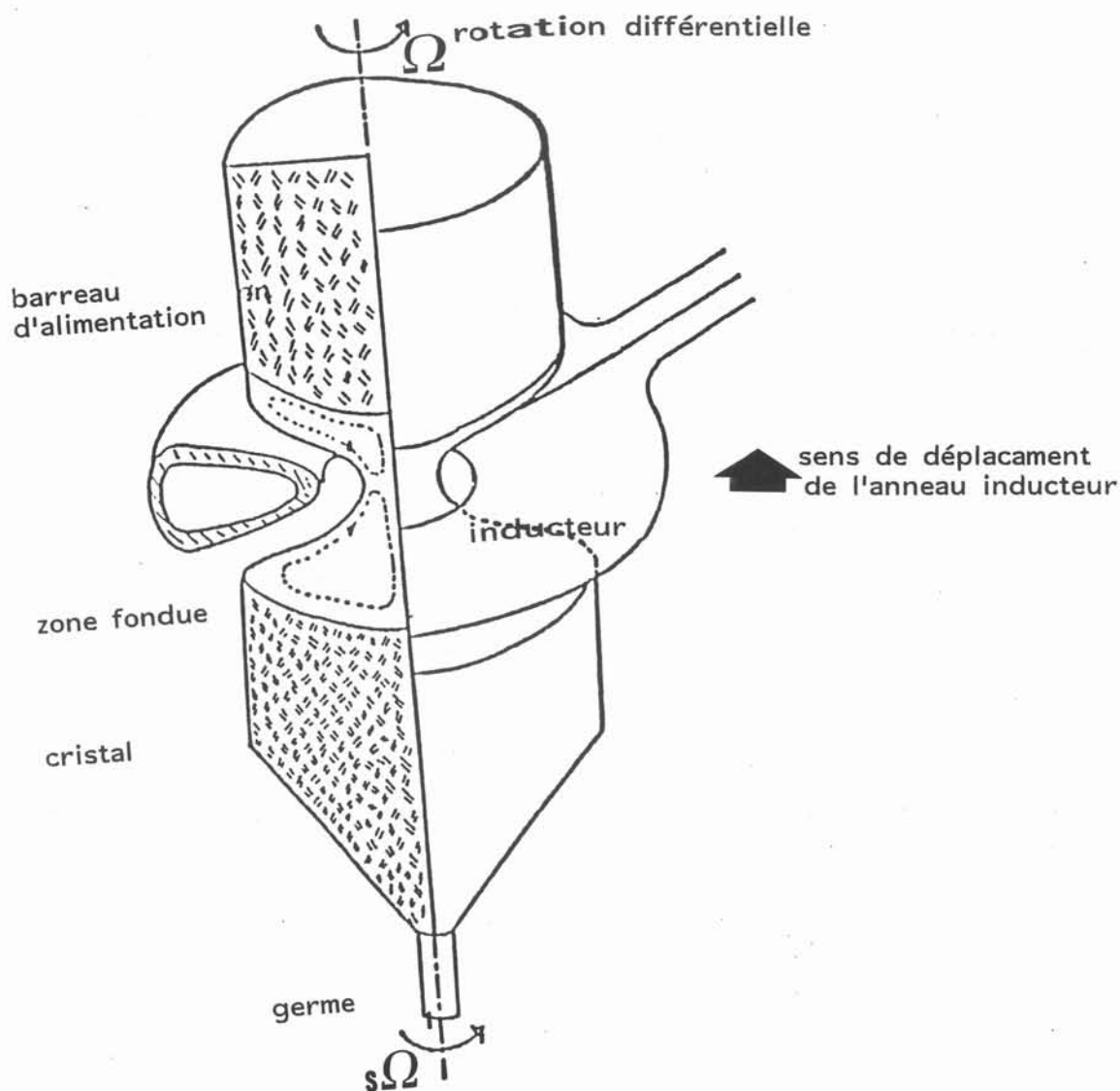


Schéma de l'élaboration d'un monocristal de large diamètre par la technique de la zone fondue

III.2 - CALCUL DE LA SURFACE LIBRE D'UN MENISQUE AXISYMETRIQUE DE METAL LIQUIDE CENTRE SUR UN ANNEAU INDUCTEUR

III.2.1 - Zone fondue

Le procédé métallurgique dit de la zone fondue est employé pour obtenir des monocristaux de métaux conducteurs ou semi-conducteurs, comme le silicium. Il consiste à fondre, grâce à un faisceau circulaire d'électrons ou à un inducteur annulaire parcouru par un courant électrique radiofréquence, une tranche d'un cylindre de métal (barreau d'alimentation). L'anneau est déplacé le long de ce cylindre, ce qui permet de le refondre entièrement autant de fois qu'il est nécessaire à l'évacuation des impuretés. Le monocristal élaboré et la barre d'alimentation subissent une rotation différentielle.

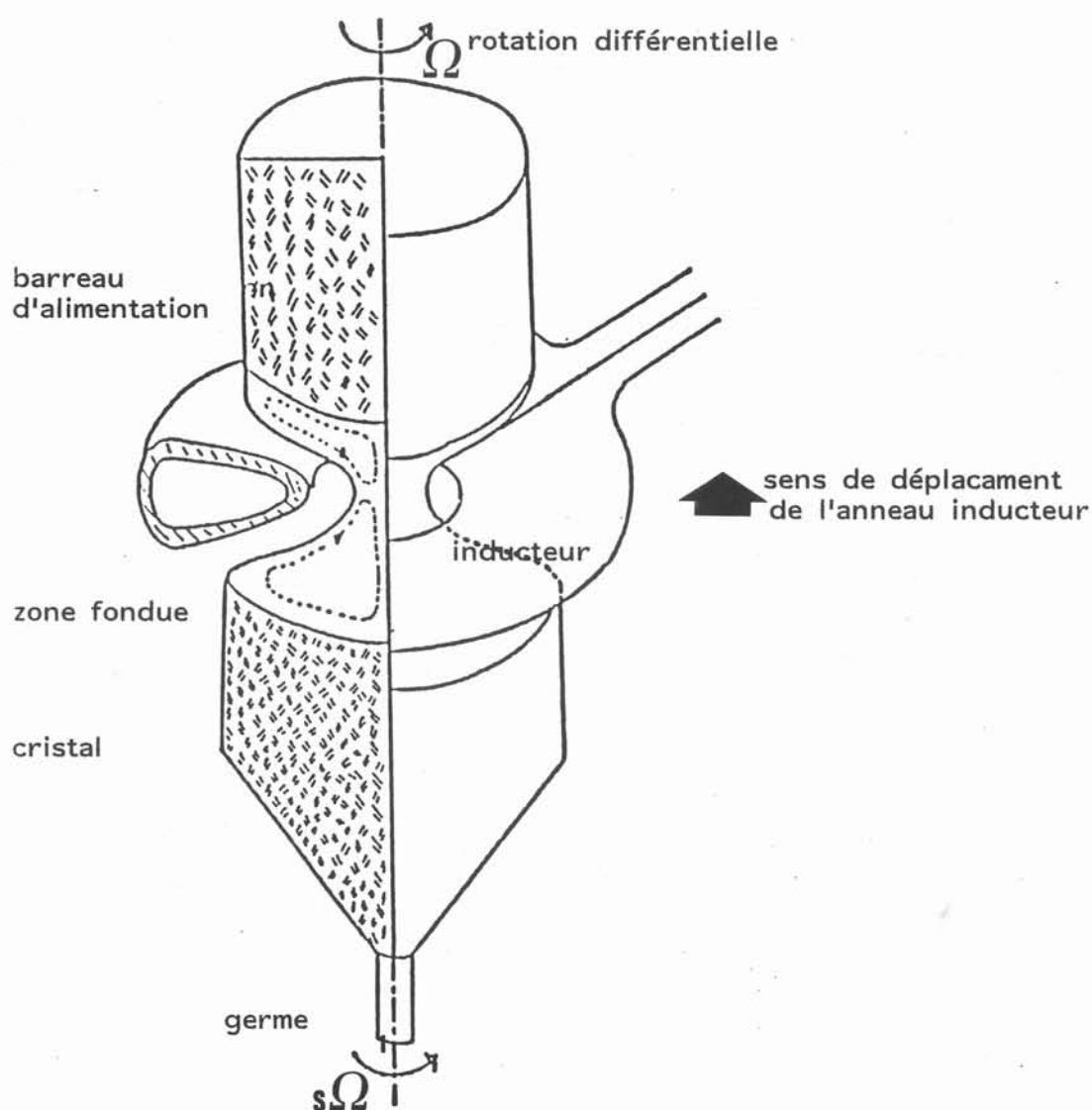


Schéma de l'élaboration d'un monocristal de large diamètre par la technique de la zone fondue

Outre les rayons du cristal et de la barre d'alimentation soutenant le ménisque, la forme de sa surface est due aux effets de :

- la tension superficielle,
- la gravité,
- la pression magnétique,
- le mouvement à l'intérieur de la zone liquide engendré par 3 facteurs principaux définis ci-dessous.

La configuration étudiée est axisymétrique. Le "point d'attache" de la surface du ménisque au solide est le point triphasique solide/liquide/atmosphère de la ligne méridienne. Le "centre" de la ligne méridienne est l'intersection de cette ligne avec la ligne médiane du ménisque. La position de cette dernière dépend des rayons respectifs de la barre d'alimentation et du cristal.

- La rotation différentielle du cristal et de la barre d'alimentation crée un écoulement de couette cisailé qui engendre un écoulement méridien dont la composante de vitesse tangente à la surface libre est dirigée du point d'attache vers le centre. La déformation de la surface du ménisque par le mouvement secondaire est calculée, pour de faibles nombres de Reynolds et nombre capillaire ($\rho v \Omega R / \gamma$) en fonction de l'allongement du ménisque par Harriot et Brown (40).

- Les gradients de température existant dans la zone fondue influencent le mouvement dans le liquide de deux manières :

a) la convection naturelle engendre des mouvements instables dans la partie supérieure de la zone fondue. Cet effet, lié à l'existence de la gravité n'existe pas dans l'espace où certaines expériences de croissance cristalline ont eu lieu.

b) Le gradient de tension superficielle crée un mouvement méridien dont la composante tangente à la surface libre est dirigé du centre vers le point d'attache. Chang et Wilcox (12), supposent la surface du ménisque cylindrique et calculent le mouvement pour de faibles nombres de Reynolds.

- Le brassage électromagnétique crée un écoulement méridien dont la composante tangente à la surface libre est dirigée du point d'attache vers le centre.

L'allongement du ménisque est déterminant pour sa stabilité.

Le calcul présenté ci-après détermine la forme que prend un ménisque de métal liquide soutenu par deux disques d'égal rayon 1 (l'allongement du ménisque est pris égal à 2) soumis aux forces électromagnétiques, de tension superficielle et de gravité. Les mouvements dans la zone fondue sont ignorés. La méthode de calcul utilisée a été formulée par Mestel (50), qui l'a appliquée à la lévitation électromagnétique. Elle a été modifiée et comparée à une méthode de minimisation d'énergie (cf § III.1). Quelques modifications ont été introduites qui permettent la prise en compte de frontières solides. Les notations sont identiques.

III.2.2 - Méthode de calcul

Le calcul se déroule de la façon suivante :

- 1) Une géométrie est choisie,
- 2) Pour cette géométrie, le champ magnétique surfacique B_s est calculé,

3) Ces valeurs sont introduites dans l'équation :

$$\Phi(t + \Delta t) = \Phi_s(t) + dt [W(x - x_0) + (z - z_0) + \alpha(B_s^2 - B_0^2)]$$

où Φ est le potentiel d'une vitesse fictive vérifiant l'équation :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{dans tout le domaine fluide}$$

Φ_s est donc connue, à chaque itération, sur la frontière libre Γ du domaine liquide.

Sur les surfaces solides, $\Gamma_2 \cup \Gamma_1$ les conditions sont :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{si ces surfaces sont immobiles}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_0 \quad \text{si le cristal est tiré à la vitesse } V_0$$

4) Ce problème est résolu par une technique d'intégrale de surface où la fonction de Green ψ est introduite :

$$\psi = \int_0^\pi [(z - z')^2 + R^2 + R'^2 - 2 R R' \cos \phi]^{-1/2} d\phi$$

dans la deuxième identité de Green qui s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} R_s \psi(x, x_s) \frac{\partial \Phi(x_s)}{\partial n} dS - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \Phi(x_s) R_s \frac{\partial \psi(x, x_s)}{\partial n} dS \\ = 2\pi \Phi(x) + \int_{\Gamma} \Phi(x_s) R_s \frac{\partial \psi(x, x_s)}{\partial n} dS - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} R_s \psi(x, x_s) \frac{\partial \Phi(x_s)}{\partial n} dS \end{aligned}$$

Le premier membre de l'égalité contient les inconnues sur la frontière et le deuxième membre les valeurs qui y sont connues.

La discrétisation de cette équation donne :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{j=n_1 \\ j \neq i}}^{n_2} R(x_j^*) \psi(x_j^*, x_i^*) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x_j^*) D_j + R_i^* \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x_i^*) \int_i^{i+1} \psi(x_s, x_i^*) dS \\
 & - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n_1-1} + \sum_{\substack{j=n_2+1 \\ j \neq i}}^n \Phi(x_j^*) R(x_j^*) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x_j^*, x_i^*) D_j \\
 & + \Phi(x_i^*) R(x_i^*) \int_i^{i+1} \frac{\partial \psi}{\partial n}(x_s, x_i^*) dS \\
 & = 2\pi \Phi_s(x_i^*) + \sum_{\substack{j=n_1 \\ j \neq i}}^{n_2} \Phi(x_j^*) R(x_j^*) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x_j^*, x_i^*) D_j \\
 & + \Phi(x_i^*) R(x_i^*) \int_i^{i+1} \frac{\partial \psi}{\partial n}(x_s, x_i^*) dS
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, les surfaces Γ_1 et Γ_2 sont considérées comme immobiles. Les segments discrétisant la surface Γ_1 sont numérotés de 1 à n_1-1 , ceux de la surface Γ de n_1 à n_2 et ceux de Γ_2 de n_2+1 à n .

Comme dans le cas du calcul de la surface libre d'une charge lévité, le système obtenu est un système linéaire :

$$A_{ij} X_j = S_i$$

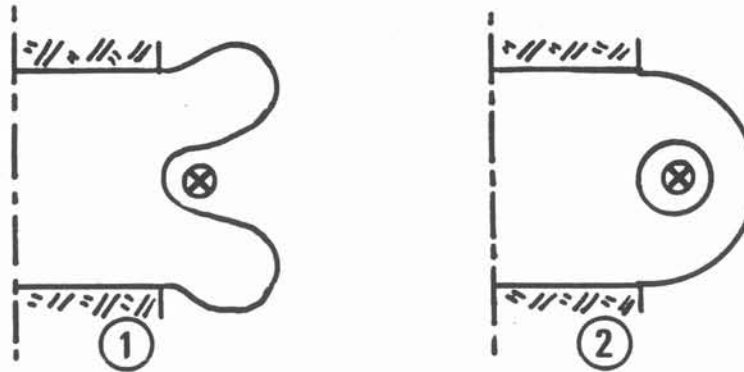
où les X_j pour $j \in [n_1, n_2]$ permettent de bouger la surface libre à chaque itération. (retour au 2) .

III.2.3 - Résultats et conclusions

Lorsque le domaine électroconducteur possède des parties de frontières solides, la convergence vers une surface d'équilibre est plus difficile que lorsque la frontière est entièrement libre. Les deux causes principales de ce phénomène sont les suivantes :

* la déformation de la surface part du centre et se propage, sous forme d'une onde sur la surface du ménisque, au cours des itérations. Lorsque l'onde atteint les points d'attaque, elle se réfléchit, elle interagit alors avec l'onde incidente.

* Si le volume liquide du ménisque est suffisamment grand, il existe deux surfaces d'équilibre de topologies différentes.

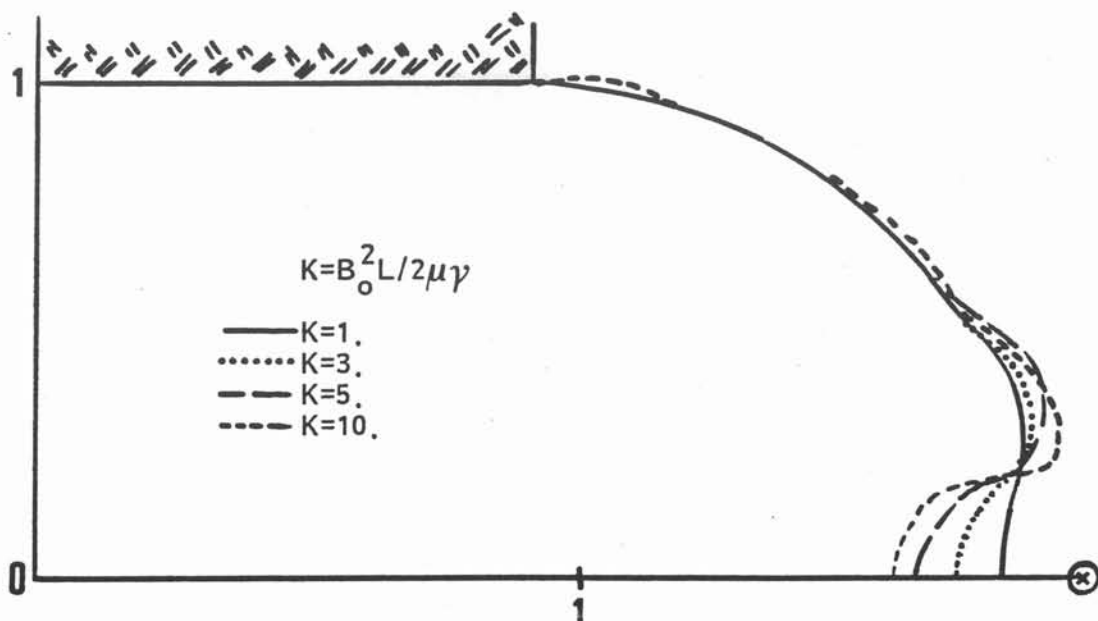


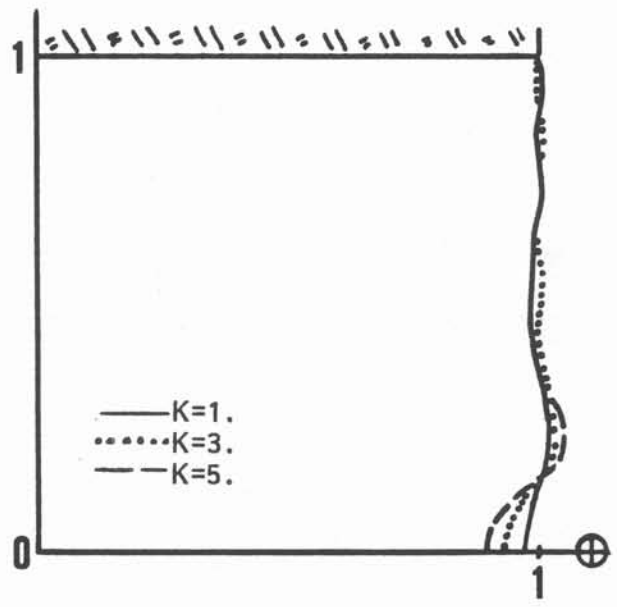
La convergence vers l'une ou l'autre surface dépend du nombre de points du maillage. Un nombre de points élevé fait tendre le calcul vers la solution 2.

Ces deux phénomènes limitent, pour le moment l'emploi de ces calculs à des nombres W pas trop faibles.

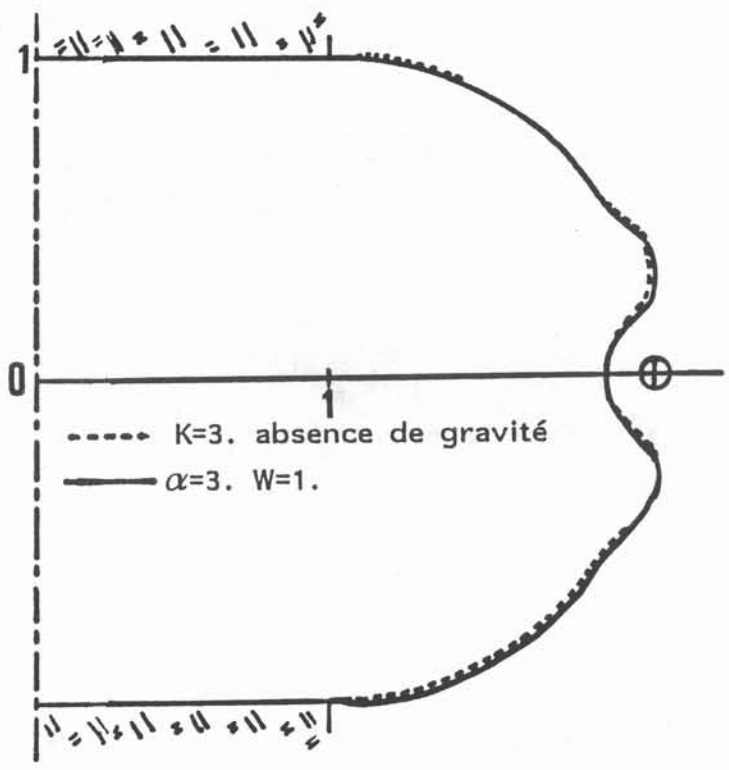
Les figures ci-dessous représentent les formes méridiennes :

- d'un demi-ménisque supérieur pour diverses valeurs du paramètre de formage électromagnétique et pour deux volumes de liquide fondu. Le premier est égal à un tronc de cylindre, le second à un tronc de cylindre muni d'une calotte toroïdale de rayon 2. La gravité est ignorée.





- d'un ménisque



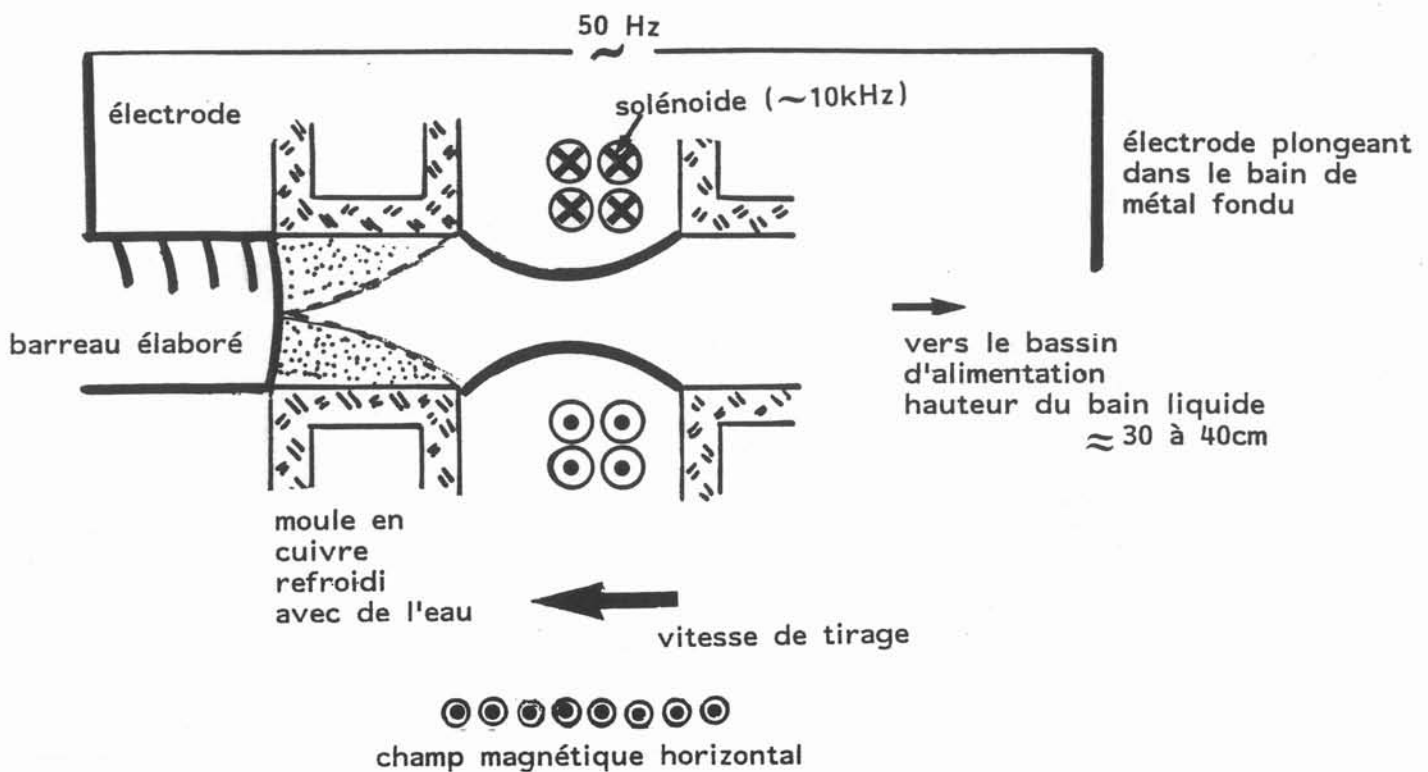
La déformation de la surface libre croît avec α .

III.3 - LA LEVITATION ELECTROMAGNETIQUE DANS LE PROCEDE DE COULEE CONTINUE HORIZONTALE - ANALYSE DE LA STABILITE EN MODES NORMAUX.

III.3.1 - INTRODUCTION

Les vitesses de coulée industrielles et les relativement mauvaises propriétés thermiques de certains métaux, comme l'acier imposent des longueurs de puits de solidification d'une dizaine de mètres. La solution actuellement adoptée pour l'acier consiste à courber le lingot (brame ou billette) dont le cœur est encore liquide. Cependant, le rayon de courbure et, partant, la taille de l'installation, restent importants. Ainsi, le remplacement des installations de coulée verticale par des installations de coulée horizontale permet de diminuer la taille et donc les investissements des unités de production. L'inconvénient principal du mode de production horizontale est la difficulté de mise en oeuvre de l'oscillation de la lingotière. Actuellement, dans de telles installations industrielles, un retrait intermittent est donc utilisé, ce qui nécessite l'emploi de matériaux coûteux pour la fabrication de la busette et le revêtement de la lingotière (45).

L'utilisation des forces électromagnétiques pour léviter le métal à la sortie de la busette permettrait de supprimer cet inconvénient. Hoyer (41), montre la faisabilité de l'utilisation de la lévitation électromagnétique sur des expériences de coulée continue horizontale d'étain. Son installation expérimentale lui a permis d'élaborer des barreaux de 20 mm de diamètre. Elle comporte deux dispositifs électromagnétiques comme le montre le schéma ci-dessous.



Le premier dispositif électromagnétique est alimenté au réseau. Il comporte un solénoïde créant un champ magnétique horizontal d'axe perpendiculaire à l'axe du barreau à élaborer, et un circuit électrique composé du métal et de deux électrodes, l'une trempant dans le bac d'alimentation, l'autre touchant l'extrémité du barreau élaboré. Ce dispositif sert à la lévitation de la partie fondue de longueur 12 mm.

Le second dispositif a été mis en place pour créer des forces capables de compenser la pression métallostatique. C'est un solénoïde de 4 spires centré sur la partie fondue. Il est alimenté en courant électrique de fréquence 10 kHz.

Dans cette installation, la lingotière, ou moule, en cuivre refroidi, assurant la solidification du barreau n'oscille pas. D'autres expériences sont menées à l'université de Nagoya, pour des barreaux et des feuilles (Asai(1)), qui ne comprennent que le premier dispositif électromagnétique : celui qui permet la lévitation de la partie fondue.

Les géométries dont nous allons étudier la stabilité, ne comportent aussi que le premier dispositif électromagnétique. Nous le considérons alimenté en courant continu, quant à la partie fondue, sa géométrie est soit celle d'une feuille infinie, soit d'un barreau infiniment long. Cette dernière approximation présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte l'invariance des dimensions finies de la busette d'alimentation et du moule refroidi.

L'analyse de stabilité présentée dans ce chapitre se déroule suivant les étapes suivantes :

- 1) Un état d'équilibre de la surface libre du domaine liquide étudié est défini,
- 2) une perturbation infinitésimale est appliquée à l'état d'équilibre. Cette perturbation est choisie connue :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{ist} e^{kr}$$

où $(\varepsilon_0/L) \ll 1$ avec L la grandeur caractéristique du domaine levité et où s est un nombre complexe.

- 3) Les perturbations du champ magnétique \mathbf{b} , du courant électrique \mathbf{j} et de la vitesse \mathbf{u} sont considérées comme proportionnelles à ε ce qui permet la linéarisation des équations, au premier ordre en ε .

- l'équation de l'induction et la continuité du champ magnétique à la frontière du domaine liquide déterminent \mathbf{b} ,
- tandis que \mathbf{j} est établi par l'utilisation de la loi d'Ampère.
- et \mathbf{u} par les équations de Navier Stokes.

- 4) La combinaison de ces équations permet d'obtenir le saut de pression à travers l'interface perturbée ou équation caractéristique.

$$s = s(\mathbf{k})$$

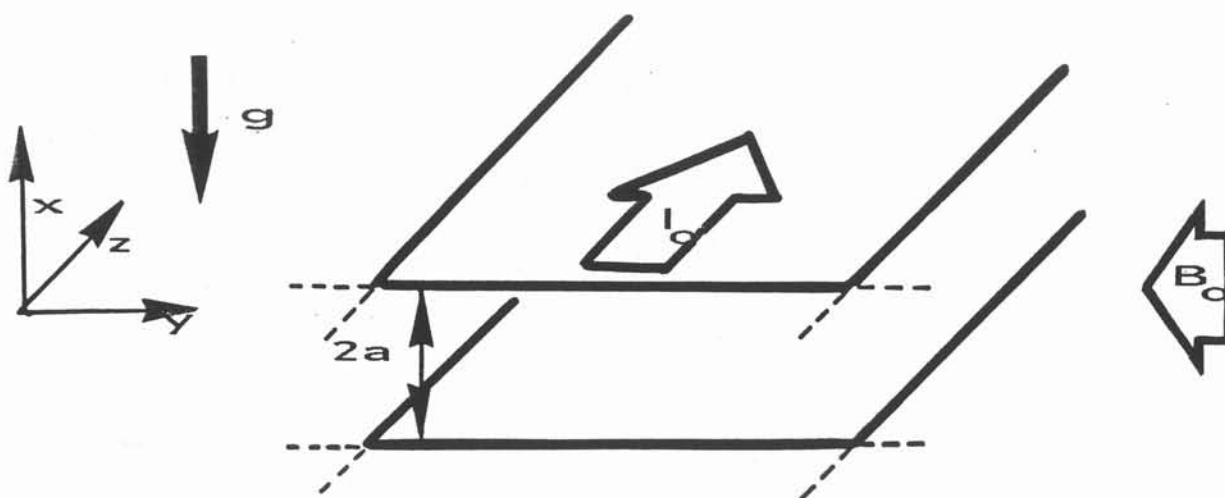
La partie imaginaire de s , s_i , représente le taux de croissance du vecteur d'onde k . L'état d'équilibre est dit stable si pour tous les vecteurs d'onde k , la partie imaginaire de s_i est nulle.

Il est instable si il existe un vecteur d'onde pour lequel s_i est négative.

Nous adoptons la notation indicielle "i" pour les valeurs à l'intérieur de la lame et "e" pour les valeurs extérieures à la lame. Le fluide est supposé non visqueux.

III.3.2 - CAS D'UNE FEUILLE DE METAL FONDU

La géométrie étudiée est illustrée par le schéma suivant :



L'équation d'équilibre d'une feuille horizontale infinie, d'épaisseur $2a$, placée dans un champ magnétique uniforme horizontal d'intensité B_0 , parcourue par un courant électrique uniforme de densité J_0 et tirée à une vitesse V_0 , va être établi.

III.3.2.1 - Equilibre de la feuille

Le champ magnétique du système est la superposition du champ magnétique uniforme appliqué : $(0, -B_0, 0)$ et du champ magnétique créé par le courant de conduction J_0 . Ce dernier est tel que :

$$\begin{aligned} x &\geq a & B_y &= \mu J_0 a \\ -a &\leq x \leq a & B_y &= \mu J_0 x \\ x &\leq -a & B_y &= -\mu J_0 a \end{aligned}$$

Le champ magnétique total à l'intérieur de la lame liquide est donc :

$$\mathbf{B}_1 = (0, -B_0 + \mu J_0 x, 0)$$

Le courant électrique \mathbf{J}_1 créé par le déplacement de la feuille à la vitesse \mathbf{V}_0 dans le champ magnétique \mathbf{B}_0 est :

$$\mathbf{J}_1 = \sigma (\mathbf{V}_0 \wedge \mathbf{B}_0) = (\sigma V_0 B_0, 0, 0)$$

Le rapport $\|\mathbf{J}_1\| / \|\mathbf{J}_0\|$ s'écrit, après introduction du nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu \sigma V a$

$$\|\mathbf{J}_1\| / \|\mathbf{J}_0\| = R_m B_0 / \mu J_0 a$$

Or, dans les conditions dans lesquelles s'opère l'élaboration de la feuille $R_m \ll 1$, \mathbf{J}_1 peut donc être négligé si B_0 n'est pas très grand devant le champ magnétique induit par le courant de densité \mathbf{J}_0 .

Alors, la force électromagnétique, verticale,

$$\mathbf{F} = (J_0 B_0 - \mu J_0^2 x, 0, 0)$$

dérive du potentiel $\Phi = -J_0 B_0 x + \mu J_0^2 x^2 / 2$

La condition de lévitation de la feuille est donc :

$$J_0 B_0 = \rho g$$

Dans ce cas, les isobares sont les plans horizontaux $x = \text{Cte}$
La pression intérieure d'une lame d'épaisseur $2a$ est :

$$P_{\text{intérieure}} = \mu J_0^2 (x^2 - a^2) / 2$$

III.3.2.2 - Perturbation de la surface

Les surfaces supérieure et inférieure peuvent être perturbées symétriquement ("varicose mode") ou antisymétriquement ("snake mode"). Seuls les calculs concernant le mode antisymétrique sont explicités dans ce qui suit, les résultats du mode symétrique s'en déduisent aisément.

Les surfaces supérieure et inférieure de la lame sont perturbées par une onde de vecteur $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)$. L'angle de \mathbf{k} avec la direction y est posé égal à θ ,

$$\mathbf{k} = k(0, \cos\theta, \sin\theta)$$

L'équation des surfaces perturbées supérieure et inférieure s'écrivent

$$x_{\text{sup}} = a + \delta x_s$$

$$x_{\text{inf}} = -a + \delta x_s$$

où

$$\delta x_s = \varepsilon_0 e^{ist} e^{i(k_y y + k_z z)}$$

III.3.2.2.1 - Expression de la perturbation du champ magnétique

La perturbation du champ magnétique \mathbf{b} est prise sous la forme :

$$\mathbf{b}_{i,e} = (b_{x_{i,e}}, b_{y_{i,e}}, b_{z_{i,e}}) \delta x_s$$

* Le champ magnétique extérieur à la lame est harmonique, il dérive d'un potentiel Φ , $\mathbf{b}_e = -\nabla \Phi$ tel que

$$\Phi = \Phi_1 \delta x_s$$

et $\Phi_1 = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}$ où $k^2 = k_y^2 + k_z^2$

Le champ magnétique est donc égal à :

$$\mathbf{b}_e = \delta x_s A_2 e^{-kx} (-k, -ik_y, -ik_z)$$

au dessus de la feuille liquide et

$$\mathbf{b}_e = \delta x_s A_1 e^{kx} (-k, -ik_y, -ik_z)$$

au dessous de la feuille liquide.

* A l'intérieur de la lame liquide, le champ magnétique \mathbf{b}_i vérifie l'équation de l'induction :

$$\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{b}_i$$

soit :

$$b_1 = \delta x_s \begin{bmatrix} A_x e^{\gamma x} + B_x e^{-\gamma x} \\ A_y e^{\gamma x} + B_y e^{-\gamma x} \\ A_z e^{\gamma x} + B_z e^{-\gamma x} \end{bmatrix}$$

où γ est un nombre complexe tel que $\gamma^2 = k^2 + i \mu \sigma s$

Cette relation, rendue adimensionnelle par :

$$\gamma = \gamma^*/a \quad k = k^*/a \quad s = s^*U/a$$

devient

$$\gamma^{*2} = k^{*2} + i R_m s^*$$

Ainsi, dans la suite des calculs

$$\gamma \simeq k$$

en première approximation en R_m .

* Les valeurs $A_1, A_2, A_x, B_x, A_y, B_y, A_z, B_z$ sont calculées grâce aux équations établissant la continuité du champ magnétique aux interfaces supérieure et inférieure de la feuille :

$$\begin{bmatrix} (b_{ex} - b_{ix})_{x=x_s} = 0 \\ (b_{ez} - b_{iz})_{x=x_s} = 0 \\ (b_{ey} - b_{iy})_{x=a+\delta x_s} = \mu J_o \delta x_s \\ (b_{ey} - b_{iy})_{x=a+\delta x_s} = -\mu J_o \delta x_s \end{bmatrix}$$

La perturbation du champ magnétique intérieur s'écrit donc :

$$b_1 = \delta x_s \mu J_o \begin{bmatrix} i \cos \theta e^{-ka} \operatorname{sh} kx \\ -(\cos^2 \theta e^{-ka} + \sin^2 \theta / \operatorname{ch} ka) \operatorname{ch} kx \\ \sin \theta \cos \theta e^{-ka} \operatorname{th} ka \operatorname{ch} kx \end{bmatrix}$$

III.3.2.2.2 - Expression de la perturbation du courant électrique

L'expression de la perturbation du courant électrique se déduit de la loi d'Ampère

$$\mathbf{j} = \delta x_s J_0 \frac{k \sin \theta}{\operatorname{ch} ka} \begin{bmatrix} i \operatorname{ch} kx \\ -\cos \theta \operatorname{sh} kx \\ -\sin \theta \operatorname{sh} kx \end{bmatrix}$$

Lorsque \mathbf{k} est parallèle au champ magnétique le courant \mathbf{j} est nul.

A ce niveau de l'étude, il est intéressant de vérifier que la composante normale à la surface du courant électrique total est nulle. Ce dernier s'exprime par :

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_0 + \mathbf{j} = (j_x, j_y, J_0 + j_z)$$

et la normale à la surface \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = (1, -i k_y \delta x_s, -i k_z \delta x_s)$$

Ces deux valeurs vérifient bien la relation :

$$\mathbf{J}_t \cdot \mathbf{n} = 0$$

III.3.2.2.3 - Expression de la force électromagnétique

La perturbation \mathbf{f} de la force électromagnétique est telle que :

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}_0 \wedge \mathbf{b} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}_0$$

soit

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} (B_0 - \mu J_0 x) j_z - J_0 b_y \\ J_0 b_x \\ -(B_0 - \mu J_0 x) j_x \end{bmatrix}$$

ou bien en remplaçant les j_i , b_i par leurs valeurs précédemment calculées.

$$f = \delta x_s \begin{bmatrix} J_0 (B_0 - \mu J_0 x) \left(-k \sin^2 \theta \frac{\text{sh} kx}{\text{ch} ka} \right) + \mu J_0^2 \left(e^{-ka} \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\text{ch} ka} \right) \text{ch} kx \\ i \mu J_0^2 \cos \theta e^{-ka} \text{sh} kx \\ -i J_0 (B_0 - \mu J_0 x) k \sin \theta \frac{\text{ch} kx}{\text{ch} ka} \end{bmatrix}$$

III.3.2.2.4 - Equation de la perturbation du mouvement

Les composantes de la perturbation de la vitesse induite par la déformation de la surface sont (u_x, u_y, u_z) .

Les projections sur x , y , et z de l'équation de Navier-Stokes peuvent être linéarisées au premier ordre en δx_s et s'écrivent :

$$i \rho (s + k_z V_0) u_x = -Dp + f_x - g \delta \rho - g k^2 \delta(x-x_s) \delta x_s$$

$$i \rho (s + k_z V_0) u_y = -i k_y p + f_y$$

$$i \rho (s + k_z V_0) u_z = -i k_z p + f_z$$

où $D \equiv \partial/\partial x$

Les termes de gravité $-g \delta \rho$ et de tension superficielle $-\gamma k^2 \delta(x-x_s) \delta x_s$ de la projection suivant x n'interviennent qu'à la surface du liquide.

L'équation du mouvement suivant x dans le bain est obtenue de façon conventionnelle (11) par élimination de la pression. La procédure est la suivante :

- les équations du mouvement suivant y et z sont multipliées respectivement par ik_y et ik_z puis additionnées.

- l'équation de continuité

$$Du_x + ik_y u_y + ik_z u_z = 0$$

est alors utilisée pour éliminer u_y et u_z de l'équation obtenue.

- cette équation est dérivée par rapport à x et on lui soustrait l'équation suivant x multipliée par k^2 . Cette dernière opération assure l'élimination du terme de pression.

L'équation obtenue est :

$$\rho (s + k_z V_0) (D^2 - k^2) u_x = ik^2 f_x - D(\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}) - g k^2 i \delta \rho - \gamma k^4 \delta(x-x_s) \delta x_s$$

Dans le fluide u_x répond donc à l'équation :

$$\rho (s + k_z V_0) (D^2 - k^2) u_x = 0$$

car $ik^2 f_x - D(k f) = 0$ sous l'approximation $\gamma \approx k$

u_x est donc de la forme :

$$u_x = u_1 e^{kx} + u_2 e^{-kx}$$

Les valeurs de u_1 et u_2 sont déterminées grâce aux conditions aux limites sur le déplacement de la surface.

III.3.2.2.5 - Conditions aux limites

* La vitesse u_x et le déplacement δx_s de la surface sont liés par la relation :

$$\frac{d}{dt}(\delta x_s) = u_x \Big|_{x=x_s}$$

ou bien :

$$\delta x_s = -i \frac{u_x}{s + k_z V_0} \Big|_{x=x_s}$$

Cette condition appliquée aux surfaces supérieure et inférieure détermine u_1 et u_2 . u_x s'exprime alors sous la forme

$$u_x = i \delta x_s (s + k_z V_0) \operatorname{ch} kx / \operatorname{ch} ka$$

* L'équation de conservation de la masse permet de relier $\delta \rho$ la différence locale de densité, nulle dans le liquide, au déplacement de la surface libre

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0$$

qui s'écrit sous sa forme linéarisée

$$\delta \rho \Big|_{x=x_s} = i D \rho \frac{u_x}{s + k V_0} \Big|_{x=x_s}$$

ou bien :

$$\delta p \big|_{x=x_s} = -D\rho \delta x_s$$

Cette expression est portée dans l'équation du mouvement qui devient à la surface :

$$\Delta_s(\rho(s + k_z V_o) Du_x) = -\Delta_s(kf) + i g k^2 \Delta_s \rho \delta x_s - i \gamma k^4 \delta x_s$$

où $\Delta_s(G) = G_1 - G_2$ désigne le saut de la quantité G à l'interface entre les milieux 1 et 2.

Cette équation est appliquée à l'interface inférieure de la feuille lévitée où $x_s = -a + \delta x_s$.

Sur cette interface

$$kf(-a) = -i \delta x_s (\mu J_o^2 k \cos^2 \theta e^{-ka} \operatorname{sh} ka + J_o (B_o + \mu J_o a) k^2 \sin^2 \theta)$$

et

$$Du_x(-a) = -i \delta x_s (s + k_z V_o) k \operatorname{th} ka$$

La reconstitution de l'équation donne l'équation caractéristique suivante :

$$\begin{aligned} \rho (s + k_z V_o)^2 \operatorname{th} ka &= -\mu J_o^2 \cos^2 \theta e^{-ka} \operatorname{sh} ka \\ &\quad - J_o (B_o + \mu J_o a) k \sin^2 \theta \\ &\quad - \rho g k + \gamma k^3 \end{aligned}$$

qui ,sous forme adimensionnelle ,s'écrit:

$$\begin{aligned} (s + k \sin \theta)^2 \operatorname{th} ka &= -\beta_1 k (1 + \cos^2 \theta) \\ &\quad + \beta_2 k^3 \\ &\quad - \beta_3 (\cos^2 \theta e^{-ka} \operatorname{sh} k + k \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

où

$$\beta_1 = g a / V_o^2 \quad \beta_2 = \gamma / \rho V_o^2 a \quad \beta_3 = \mu J_o^2 a^2 / \rho V_o^2$$

les astérisques ont été oubliées par commodité.

* β_1 est le rapport des forces de gravité ou forces d'inertie. Ce terme est déstabilisant avec un maximum quand k est aligné avec le champ magnétique.

* β_2 est l'inverse d'un nombre de Weber, c'est le rapport des forces de tension superficielle aux forces d'inertie. Ce terme est toujours stabilisant.

* β_3 peut être écrit sous la forme du carré du rapport de la vitesse d'Alfven basée sur le champ magnétique induit par la densité de courant électrique J_0 .

$$U_A = \mu J_0 a / \sqrt{\mu \rho}$$

à la vitesse de tirage V_0 .

Alors $\beta_3 = (U_A / V_0)^2$ ce terme est déstabilisant.

Les termes électromagnétiques permettent la lévitation d'une feuille de métal fondue mais n'assurent pas sa stabilisation dans sa position d'équilibre.

La condition nécessaire pour négliger les courants induits par le mouvement de la feuille liquide dans le champ magnétique impose :

$$R_m \beta_1 \ll \beta_3$$

III.3.2.3 - Perturbation de la feuille mode symétrique

Dans le cas où la perturbation de la feuille est symétrique, les équations des surfaces supérieure et inférieure sont :

$$x_{\text{sup}} = a + \delta x_s$$

$$x_{\text{inf}} = -a - \delta x_s$$

Ceci impose des conditions aux limites telles que, dans les expressions de \mathbf{b} , \mathbf{j} et \mathbf{f} , les sinus hyperboliques de l'analyse concernant le mode antisymétrique deviennent des cosinus hyperboliques et inversement.

Pour le mode symétrique, l'équation caractéristique s'écrit :

$$\begin{aligned} (s + k \sin \theta)^2 \coth k &= -\beta_1 k (1 + \cos^2 \theta) \\ &+ \beta_2 k^3 \\ &- \beta_3 (\cos^2 \theta e^{-k} \cosh k + k \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

III.3.2.4 - Résultats

Le deuxième membre des équations caractéristiques est appelé $f_{a,s}(k)$. L'équilibre étudié n'est stable que pour les nombres d'onde tels que

$$f_{a,s}(k) \geq 0$$

Le nombre d'onde pour lequel $f_{a,s}(k) = 0$ est appelé k_{\min} . Cette valeur revêt une importance pratique fondamentale puisqu'une feuille lévitée de longueur λ supérieure à λ_c ,

$$\lambda_c = 2\pi / k_{\min}$$

sera instable. Le fait que cette analyse ne prenne pas en compte les dimensions fixées de la busette et du moule rend délicate l'interprétation des résultats lorsque $\lambda < \lambda_c$.

Pour une longueur d'onde donnée, tous paramètres β_i fixés par ailleurs, k_{\min} varie en fonction de θ . La valeur de θ pour laquelle k_{\min} est maximum vérifie $\partial f / \partial \theta = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \sin 2\theta \left(\beta_1 k + \beta_3 \left(e^{-k} \left| \frac{\text{sh}k}{\text{ch}k} \right| - k \right) \right)$$

k_{\min} est maximum pour $\theta = \pi/2$, minimum pour $\theta = 0$ ou π .

Ce résultat est en accord avec le fait que le champ magnétique ne stabilise pas les ondes qui lui sont perpendiculaires.

* Quand $\theta = 0$, c'est à dire $k // B_0$, k_{\min} vérifie l'équation :

$$-2\beta_1 k + \beta_2 k^3 - \beta_3 e^{-k} \left| \frac{\text{sh}k}{\text{ch}k} \right| = 0$$

qui devient quand k est grand (> 2 environ)

$$-2\beta_1 k + \beta_2 k^3 - \beta_3/2 = 0$$

* Quand $\theta = \pi/2$ alors $k // V_0$ et k_{\min} répond à l'équation :

$$k_{\min}^2 = (\beta_1 + \beta_3) / \beta_2$$

Ce dernier résultat , semblable à celui d'une instabilité de Rayleigh-Taylor (10) dont la gravité g_1 est modifiée :

$$g_1 = g + \mu J_0^2 a$$

est valable quelque soit le mode d'instabilité envisagé.

Lorsque $\theta = \pi/2$ ($k \parallel J_0$) et pour une longueur d'onde donnée :

$$s_{ia} > s_{is}$$

Ce résultat est surprenant. En effet, la variation de la perturbation du courant électrique, due à la variation de la section de la lame perpendiculaire au courant électrique J_0 est nulle pour le mode antisymétrique et égale à :

$$\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} j_z dx = -2 \delta x_s J_0$$

pour le mode symétrique. Cet effet est appelé effet de "Pinch". Ce phénomène pourrait faire croire à une déstabilisation plus grande du mode symétrique. Les calculs prouvent le contraire :

le mode antisymétrique "naturellement" plus instable que le mode symétrique reste plus instable dans cette configuration. Cette différence de comportement s'accroît avec l'augmentation des longueurs d'onde.

* Le nombre d'onde k_c correspondant au maximum d'instabilité se trouve par dérivation de :

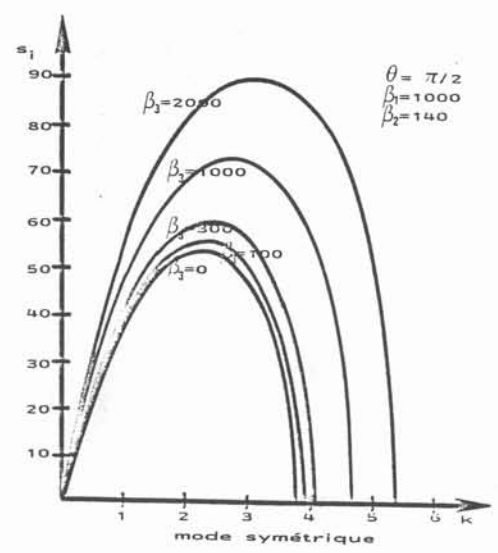
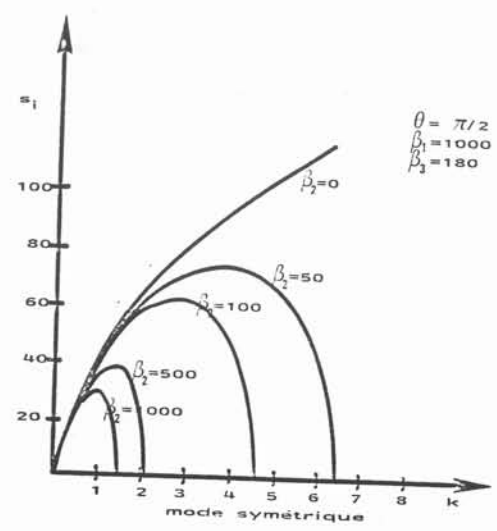
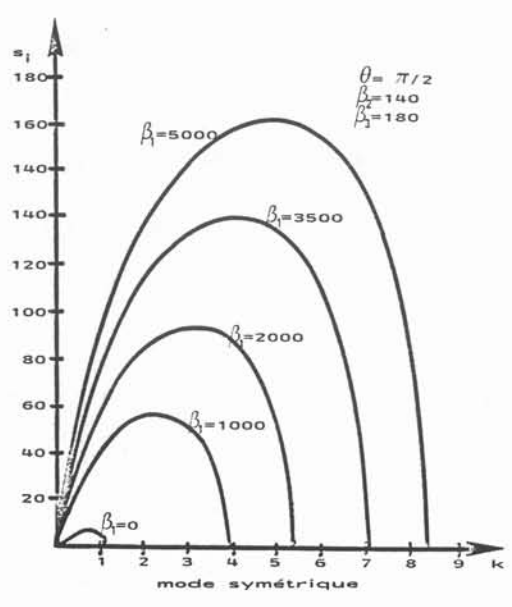
$$s_i = \left(-\frac{f_a(k)}{\tanh k} \right)^{1/2} \quad \text{pour le mode antisymétrique}$$

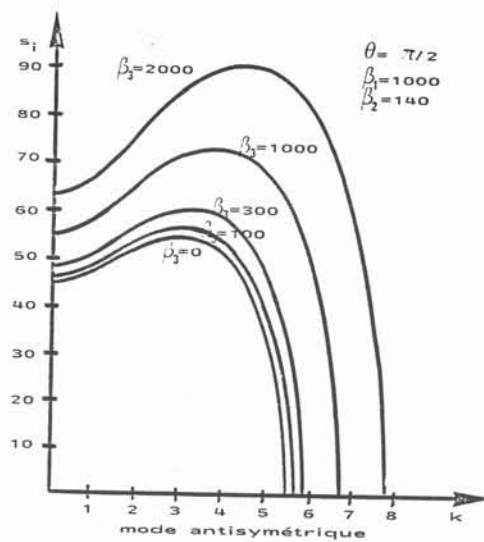
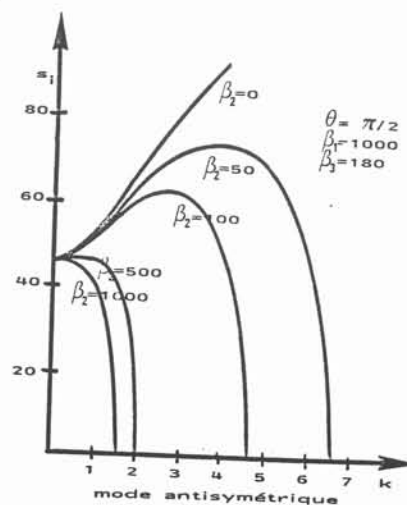
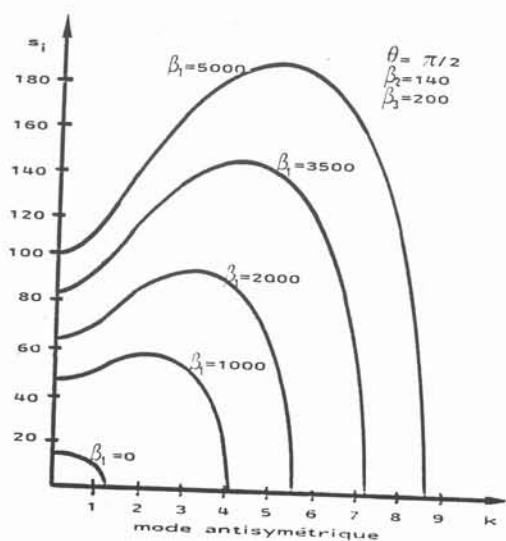
$$s_i = \left(-\frac{f_s(k)}{\coth k} \right)^{1/2} \quad \text{pour le mode symétrique}$$

Le calcul est long et ne procure aucun résultat analytique direct. Il est donc beaucoup avantageux de tracer les courbes :

$$s_i = s_i(k)$$

dont un échantillon est représenté ci-dessous pour $\theta = \pi/2$ et diverses valeurs des β_i .





* Les valeurs physiques suivantes fournissent un exemple d'application :

$$J_0 = 10^6 \text{ A.m}^{-2} \quad B_0 = 687 \text{ Gauss} \quad g = 0.8 \text{ N.m}^{-1}$$

$$a = 10^{-2} \text{ m} \quad V_0 = 10^{-2} \text{ m.s}^{-1} \quad \rho = 7.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

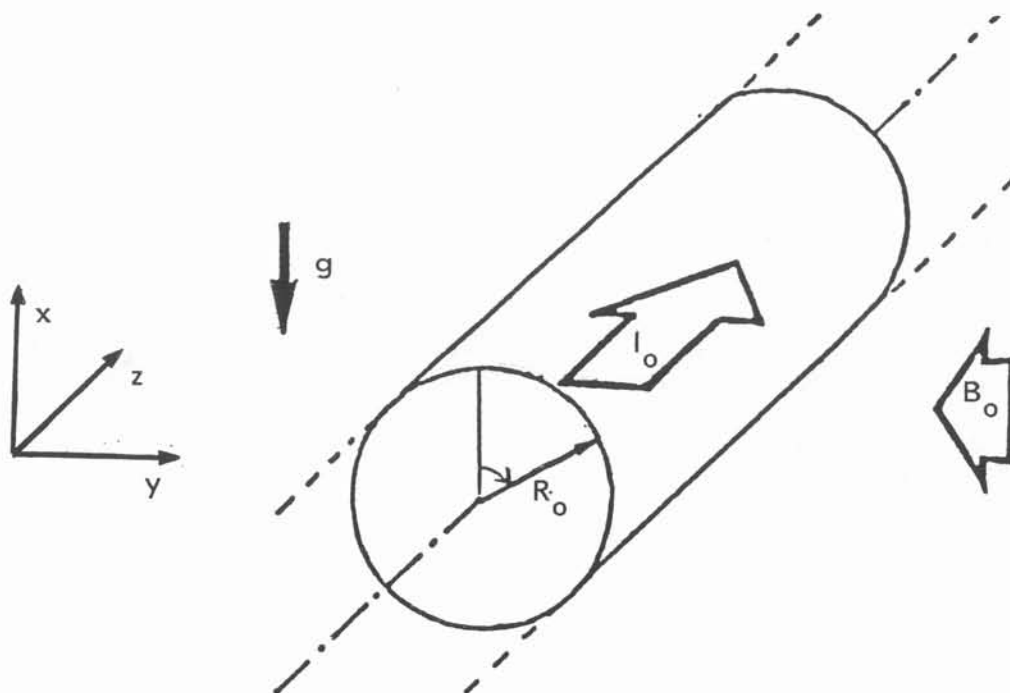
alors $\beta_1 = 981 \quad \beta_2 = 114 \quad \beta_3 = 179$

$$k_{\min} = 4.34 \quad \text{et} \quad k_c = 2.45, \quad s_{ic} = 60.18$$

La partie fondue lévité de la feuille doit donc être plus courte que 2 cm . La première instabilité à croître présentera une longueur d'onde de 2,24 cm et s'établira en 1/10s.

III.3.3 - CAS D'UN BARREAU DE METAL FONDU

Nous considérons un cylindre de liquide électroconducteur, infiniment long, lévité électromagnétiquement à l'encontre de la gravité. Les grandeurs et coordonnées utilisées sont définies sur le schéma suivant.



Murty (54,55) a étudié la stabilité de ce type de configuration dans le cas où le fluide est très électroconducteur.

L'analyse de la stabilité de cette géométrie suit celle se rapportant à la feuille. Les fonctions de Bessel remplacent les fonctions hyperboliques.

III.3.3.2 - Etat d'équilibre

Au champ magnétique uniforme B_0 , autorisant la lévitation du barreau se superpose le champ du à l'existence du courant axial d'intensité I_0 et de densité J_0 ,

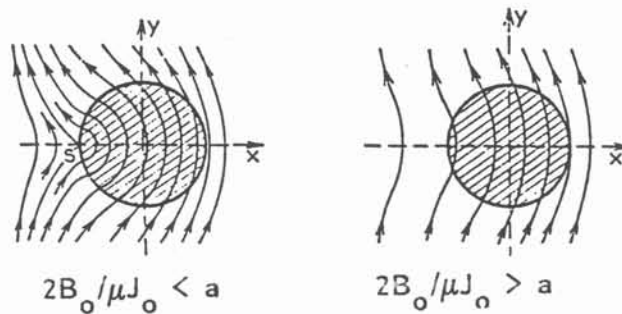
$$J_0 = \frac{I_0}{\pi R_0^2}$$

où R_0 est le rayon du cylindre lévité.

Ce champ est azimuthal et s'écrit sous la forme (Durand(15)) suivante :

$$\begin{aligned} \text{à l'intérieur du barreau} \quad B_\theta &= \frac{\mu I_0}{2\pi R_0^2} r & r \leq R_0 \\ \text{à l'extérieur du barreau} \quad B_\theta &= \frac{\mu I_0}{2\pi} \frac{1}{r} & r \geq R_0 \end{aligned}$$

La forme des lignes de courant est illustrée par le schéma suivant :



Comme dans le cas de la feuille, nous considérons le courant électrique J_1 induit par le mouvement du barreau dans le champ magnétique comme négligeable par rapport au courant de conduction appliqué J_0 .

$$\|J_1\| / \|J_0\| = R_m B_0 / \mu J_0 R_0$$

La force électromagnétique $\mathbf{F} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$ dérive d'un potentiel

$$\Phi = \frac{\mu J_o^2 r^2}{4} - J_o B_o x$$

Lorsque $J_o B_o$ vérifie la condition :

$$\rho g = J_o B_o$$

Les isobares sont les surfaces d'équation :

$$\mu J_o^2 r^2 / 4 = \text{Cte}$$

Ce sont des cercles concentriques.

Le saut de pression de l'extérieur du barreau à l'intérieur du barreau s'écrit :

$$p_i - p_e = \frac{\mu J_o^2}{4} (R_o^2 - r^2) + \frac{\gamma}{R_o}$$

III.3.3.2 - Perturbations

En coordonnées cylindriques, l'équation de la surface libre perturbée s'écrit :

$$r_s = R_o + \delta r_s \quad \text{où} \quad \delta r_s = \varepsilon_o e^{i s t} e^{i(m\theta + kz)}$$

avec ε_o vérifiant la condition $\varepsilon_o \ll R_o$.

Seules les perturbations axisymétriques ($m = 0$) sont étudiées dans la suite de cette analyse. Les perturbations d'ordre supérieur sont considérées comme stables (11).

III.3.3.2.1 - Expressions du champ magnétique, du courant et la force électromagnétique

Le champ magnétique extérieur est de la forme :

$$\mathbf{b}_e = \delta r_s \begin{bmatrix} k a K_1(k r) \\ 0 \\ -i k a K_0(k r) \end{bmatrix}$$

tandis que le champ intérieur s'écrit :

$$b_i = \delta r_s \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) I_1(\gamma r) \\ -i(a_1 - a_2) I_1(\gamma r) \\ a_3 I_0(\gamma r) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a_1 + a_2 + i a_3 \frac{k}{\gamma} = 0$$

où I_n et K_n sont des fonctions de Bessel modifiées de première et de deuxième espèce d'ordre n . Les valeurs de a , a_1 , a_2 , a_3 sont déterminées par la condition de continuité du champ magnétique à l'interface, soit :

$$\begin{cases} (b_{er} - b_{ir})_{r=r_s} = 0 \\ (b_{e\theta} - b_{i\theta})_{r=r_s} = \mu J_0 \delta r_s \\ (b_{ez} - b_{iz})_{r=r_s} = 0 \end{cases}$$

Comme pour le cas de la feuille, le nombre complexe γ tel que :

$$\gamma^2 = k^2 + i \mu \sigma s$$

est pris égal à k , cette approximation étant justifiée par la petitesse du nombre de Reynolds magnétique.

Sous cette approximation, le champ magnétique intérieur a pour expression :

$$b_i = \delta r_s \mu J_0 (0, -I_1(kr)/I_1(kR_0), 0)$$

le courant électrique :

$$j = \delta r_s k J_0 (i I_1(kr), 0, I_0(kr)/I_1(kR_0))$$

et la force électromagnétique :

$$f = \begin{bmatrix} -J_0 b_\theta - j_z (\mu J_0 r/2 - B_0 \cos\theta) \\ -B_0 j_z \cos\theta \\ j_r (\mu J_0 r/2 - B_0 \cos\theta) \end{bmatrix}$$

ou bien :

$$f = \delta r_s \frac{J_0}{I_1(kR_0)} \begin{bmatrix} \mu J_0 I_1(kr) + k(\mu J_0 r/2 - B_0 \cos\theta) I_0(kr) \\ B_0 \sin\theta k I_0(kr) \\ i k I_1(kr) (\mu J_0 r/2 - B_0 \cos\theta) \end{bmatrix}$$

III.3.3.2.2 - Equation de Navier Stokes

La projection, en coordonnées polaires, de la partie perturbée des équations de Navier Stokes s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} i \rho (s + kV_0) u_r = -Dp + f_r - g \delta \rho \cos\theta - g/R_0^2 (1 - k^2 R_0^2) \delta(r - r_s) \delta r_s \\ i \rho (s + kV_0) u_\theta = f_\theta + g \delta \rho \sin\theta \\ i \rho (s + kV_0) u_z = -i k p + f_z \end{cases}$$

où $D \equiv \partial/\partial r$

et l'équation de continuité devient sous sa forme linéarisée :

$$-i k u_z = D(r u_r)/r$$

L'équation différentielle décrivant le mouvement radial du fluide s'obtient de façon conventionnelle :

$$\begin{aligned} \rho (s + V_0 k) \left[D\left(\frac{1}{r} D(r u_r)\right) - k^2 u_r \right] = \\ -k D f_z + i k^2 f_r + i g \delta \rho k^2 \cos\theta \\ - i \gamma \frac{k^2}{R_0^2} (1 - k^2 R_0^2) \delta(r - r_s) \delta r_s \end{aligned}$$

III.3.3.2.2.1 - L'équation du mouvement dans le liquide est donc :

$$\rho (s + V_o k) \left[D \left(\frac{1}{r} D(r u_r) \right) - k^2 u_r \right] = i k^2 f_r - k D f_z$$

L'expression de la force électromagnétique détermine la forme du second membre de cette équation :

$$i k^2 f_r - k D f_z = i k^2 J_0 \frac{I_0(kr)}{I_1(kR_0)} \left(\mu J_0 - \frac{B_0 \cos \theta}{r} \right)$$

La solution générale de cette équation est :

$$u_r = A I_1(kr) + u_o$$

où u_o est une solution particulière de l'équation avec deuxième membre qui est déterminé de la façon suivante.

III.3.3.2.2.2. Solution particulière de l'équation avec deuxième membre

L'équation adimensionnelle dont u_o^* est une solution particulière est de la forme suivante

$$D^* \left(\frac{1}{r^*} D^*(r^* u_o^*) \right) - k^{*2} u_o^* = I_1(k^* r^*) \left(1 - \frac{\beta_1 \cos \theta}{\beta_3 r^*} \right)$$

$$\text{où } u_o^* \text{ est choisie telle que } V_o u_o^* = i \delta r_s \beta_3 \frac{k^{*2}}{I_1(k^*) (s^* + k^*)} u_o$$

Par commodité d'écriture, les astérisques seront oubliées dans ce qui suit. Les définitions de β_1 et β_3 sont semblables à celles utilisées précédemment :

$$\beta_1 = \frac{g R_o}{V_o^2} \quad \beta_3 = \frac{\mu_o^2 R_o^2}{\rho V_o^2}$$

La solution va être cherchée sous la forme :

$$u_o = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^n$$

en utilisant la forme de la série infinie déterminant I_1

$$I_1(kr) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{kr}{2} \right)^{2n+1} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

qui permet d'obtenir une relation de récurrence pour les a_n

$$a_0 = a_1 = 0 \quad a_2 = -\beta_4 \frac{k}{6} \quad a_3 = \frac{k}{16} \quad \text{avec} \quad \beta_4 = \frac{\beta_1}{\beta_3} \cos \theta$$

et pour $n \in [2, +\infty[$

$$a_{2n}(4n^2 - 1) = -\beta_4 \left(\frac{k}{2} \right)^{2n-1} \frac{1}{(n-1)! n!} + k^2 a_{2(n-1)}$$

$$a_{2n+1} 4n(n-1) = \left(\frac{k}{2} \right)^{2n-1} \frac{1}{(n-1)! n!} + k^2 a_{2n-1}$$

Cette valeur de u_0 et la condition aux limites sur le déplacement déterminent la valeur de A .

III.3.3.2.2.3 - Conditions aux limites

Les conditions régissant le déplacement à l'interface s'exprime sous la forme :

$$i(s + kV_0) \delta r_s = A I_1(kR_0) + u_0 \Big|_{r=r_s}$$

Le saut de densité à l'interface perturbée s'exprime sous la forme :

$$\delta \rho \Big|_{r=r_s} = -D\rho \delta r_s$$

L'équation du mouvement perturbé suivant la direction radiale s'exprime, à l'interface sous la forme suivante :

$$\rho(s + V_0 k) \frac{1}{R_0} \left(A k I_0(kR_0) + R_0 Du_0 \Big|_{r=r_s} + u_0 \Big|_{r=r_s} \right)$$

$$= -k f_z \Big|_{r=r_s} + i \rho g k^2 \cos \theta \delta r_s - i \gamma \frac{k^2}{R_0^2} (1 - k^2 R_0^2) \delta r_s$$

La valeur de f_z à la frontière est

$$f_z = i \delta r_s k R_0 (\mu J_0^2 R_0 / 2 - B_0 J_0 \cos \theta)$$

Cette valeur est reportée dans l'équation à la frontière qui donne l'équation caractéristique de stabilité suivante:

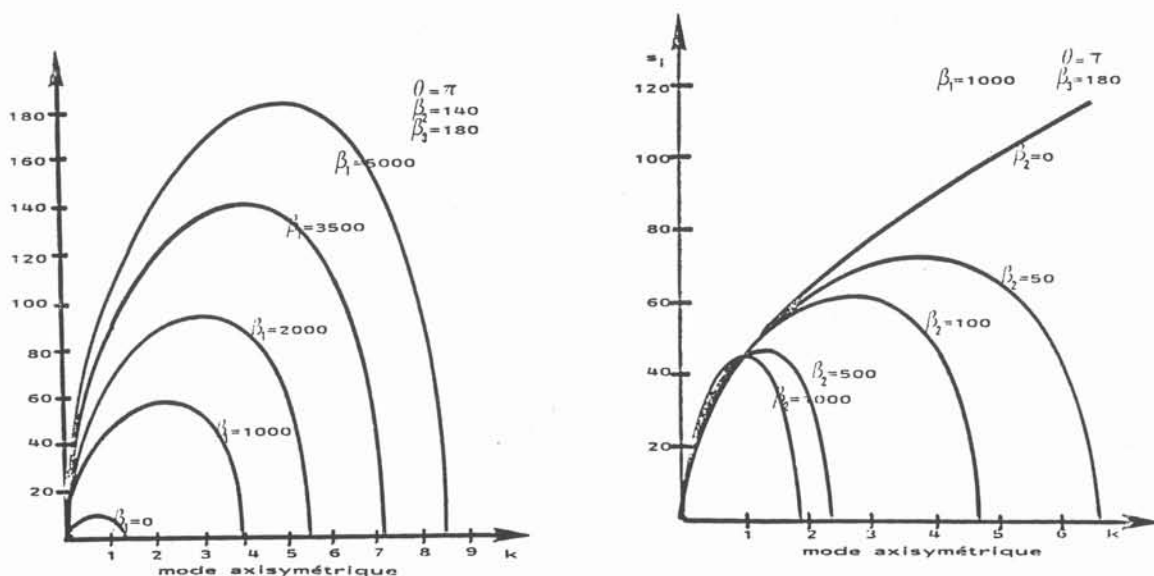
$$(s+k)^2 = \frac{k}{I_0(k)} \left[\beta_3 (u_0|_{r=r_s} \left(\frac{k I_0(k)}{I_1(k)} - 1 \right) - Du_0|_{r=r_s}) + I_1(k) \left(2\beta_1 \cos\theta - \frac{1}{2}\beta_3 - \beta_2(1-k^2) \right) \right]$$

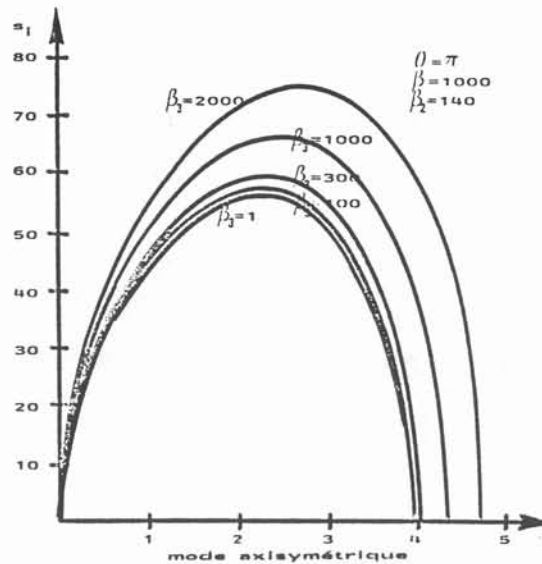
sous forme adimensionnalisée, les astérisques étant omises. La dépendance selon θ du deuxième membre de cette équation caractéristique est en $\cos\theta$. Le point d'instabilité maximum est donc bien évidemment le point $\theta = \pi$. Cette dépendance en θ de la stabilité n'a bien sûr aucun rapport avec la discussion du § III.3.2.4. où θ désigne l'angle entre le vecteur d'onde et la direction de l'opposé du champ magnétique.

La détermination analytique de k_{\min} , c'est à dire la longueur d'onde minimale pour laquelle le second membre s'annule est impossible à déterminer analytiquement à notre connaissance, aussi nous contenterons nous de présenter quelques courbes de stabilité.

III.3.2.3 - Résultats

Les courbes suivantes sont établies pour le point inférieur du barreau ($\theta = \pi$).





Nous constatons que la stabilité du point bas du barreau est semblable, pour les grandes longueurs d'onde et pour β_3 pas trop grand (< 1000) à celle des points de la surface inférieure de la feuille, quelles que soient les valeurs des paramètres β_1 et β_2 .

Les ordres de grandeurs de k_{\min} , k_c , s_c issus de cette analyse pour des grandeurs physiques identiques à celles prises pour l'application numérique se rapportant à une feuille sont donc :

$$k_{\min} = 4.34 \quad k_c = 2.45 \quad s_{ic} = 60.18$$

$$\text{pour } \beta_1 = 981 \quad \beta_2 = 114 \quad \beta_3 = 179$$

III.3.4 - CONCLUSIONS

L'analyse ci-dessus a trois limitations pratiques importantes :

- comme signalé dans l'introduction, elle ignore les dimensions fixées de la busette d'alimentation et de la lingotière

- elle suppose que la condition de lévitation :

$$B_0 J_0 = \rho g$$

n'est jamais rompue, ce qui impose de bonnes régulations des alimentations en champ magnétique et en courant électrique.

- Enfin, elle ne permet pas la prise en compte d'une perturbation d'amplitude non infinitésimale. Alors, l'effet déstabilisant du "Pinch effect" dominerait sans doute le phénomène.

Elle donne toutefois un ordre de grandeur pratique important : la longueur du domaine liquide lévité au dessus de laquelle la surface libre de ce domaine sera instable. Elle démontre que cette longueur est la même que le domaine lévité soit une feuille ou un cylindre.

CONCLUSION

CONCLUSION

Ce mémoire présente une synthèse de ma contribution à l'étude de l'utilisation de champs électromagnétiques pour contrôler la géométrie de domaines liquides électroconducteurs.

Le premier chapitre présente une étude bibliographique des conséquences de l'expulsion des champs magnétiques alternatifs, ou effet de peau électromagnétique, d'un milieu conducteur de l'électricité. Les résultats exposés s'intéressent surtout aux configurations présentant une épaisseur de peau électromagnétique faible devant la grandeur caractéristique du bain et des portions de frontières libres. L'équation d'équilibre de telles surfaces établit le bilan de l'action des termes électromagnétiques, d'inertie, de tension superficielle et de gravité. Dans beaucoup d'applications les deux premiers termes sont du même ordre et les mouvements dans le bain influencent la forme des frontières libres. C'est toutefois l'hypothèse de la magnétostatique (rigoureusement vérifiée quand l'épaisseur de peau électromagnétique est nulle), qui ignore ce couplage, qui a été retenue lors des calculs présentés dans la suite de la thèse. Cette équation permet également l'introduction des paramètres adimensionnels gouvernant les phénomènes nous intéressant :

*le "paramètre de formage électromagnétique" $K = 2\mu\gamma / B_0^2$ rapport des termes de tension superficielle aux termes électromagnétiques.

*le "paramètre de lévitation électromagnétique" $B_0^2 / \mu\rho gL$ rapport des termes électromagnétiques aux termes de gravité.

Des résultats concernant les possibilités offertes par les champs magnétiques alternatifs pour stabiliser des surfaces libres soumises à des instabilités de type Kelvin-Helmoltz et Rayleigh-Taylor sont rappelés mais aucune étude expérimentale de ce phénomène n'est exposée. Le principe du guidage électromagnétique est enfin introduit.

Le second chapitre expose des études théoriques et expérimentales réalisées sur les jets libres de métaux fondus. Ces travaux pourront servir à la mise en oeuvre du procédé métallurgique de la coulée directe. Les configurations étudiées théoriquement sont toujours très simples.

Le calcul de la section transversale d'une colonne de métal liquide étirée par un champ magnétique alternatif uniforme à l'infini est d'abord présenté. Ce calcul bidimensionnel (les effets de la gravité et de l'écoulement du jet sont ignorés) est réalisé sous l'hypothèse de la nullité de la profondeur de pénétration du champ magnétique dans le métal fondu. Il s'appuie sur le fait que la forme de la section droite du jet minimise une fonctionnelle d'énergie (terme électromagnétique + terme de tension superficielle). Le terme électromagnétique est calculé grâce à une transformation conforme (série de Laurent) du plan physique dans le plan complexe où, la forme de la surface libre étant un cercle, le champ magnétique surfacique est aisément calculable analytiquement. Des expériences réalisées sur un jet de mercure s'écoulant entre deux bobines de Helmholtz donnent des résultats en bon accord avec les calculs, malgré les réserves que l'on peut émettre quant à la validité des hypothèses soutenant ces calculs. Ce même type de calcul est utilisé dans la détermination de la forme de la charge levitée électromagnétiquement dans un inducteur en spires coniques présentée dans le troisième chapitre.

Est proposée ensuite la description d'un inducteur autorisant ,à condition que la puissance nécessaire lui soit fournie ,le formage électromagnétique d'une lame liquide de grande largeur. L'idée est de soumettre une rangée de jets liquides à un champ magnétique présentant des zones où les lignes de champ sont parallèles. Ainsi les jets sont étirés jusqu'à ce qu'ils coalescent, réalisant alors une lame liquide unique. Des résultats de tests de ce type d'inducteur sur mercure et métaux chauds sont présentés.

Une étude de guidage électromagnétique suit. Une lame de métal liquide s'écoule près d'un inducteur composé d'une ou deux branches rectiligne(s) parallèle(s) à la lame et de direction perpendiculaire au sens de son écoulement. Lorsque l'inducteur est parcouru par un courant alternatif de fréquence suffisamment élevée la lame liquide s'écoule de façon à établir un équilibre entre son inertie et la répulsion électromagnétique. L'étude théorique est bidimensionnelle et suppose que

-l'épaisseur de peau électromagnétique est petite par rapport à l'épaisseur de la lame.

-l'épaisseur de la lame est petite par rapport à la longueur caractéristique sur laquelle s'exerce la pression magnétique.

-l'effet de la gravité est ignoré.

Une relation simple liant l'angle total de déflexion à un paramètre d'interaction (rapport des forces électromagnétiques aux forces d'inertie $= \mu I^2 / \rho u_0^2 d_0 L$) est établie ,en particulier pour les deux configurations expérimentales étudiées: un inducteur à deux branches dont les axes sont dans un plan perpendiculaire ou parallèle au plan de l'écoulement en l'absence de champ magnétique.

Des résultats expérimentaux obtenus sur mercure sont comparés à la théorie.

Une autre méthode de contrôle électromagnétique ,mettant à profil la réaction d'un conducteur d'électricité face à un conducteur parcouru par un courant de sens opposé, est également proposée mais n'a pas été testée expérimentalement.

Après avoir exposé le formage d'une lame ,puis le contrôle de sa direction par utilisation de champ magnétique ,une étude d'impact d'une lame liquide sur la génératrice d'une roue en rotation est proposée. Aucun effet électromagnétique n'y est présent. Cette étude purement expérimentale a mis en évidence trois comportements distincts de l'impact .

-Lorsque le rapport de la vitesse de rotation de la roue à la vitesse incidente de la lame est faible ,le bouillonnement en arrière de la lame incidente est important et bat régulièrement à une fréquence de 5 Hz environ.

-Quand ce rapport croît ,la quantité de liquide entraîné par viscosité augmente et le volume du bouillonnement diminue. C'est la géométrie la plus stable ,préconisée pour la coulée directe sur un seul rouleau.

-Plus ce rapport augmente et plus l'air entraîné influence le comportement de la lame incidente.

Des relations de similitudes sont établies afin de permettre le transfert des résultats de ces expériences aux coulées d'étain et d'acier.

Le chapitre III regroupe des études menées sur la lévitation électromagnétique. Aucun résultat expérimental n'y est exposé. Dans un premier temps la surface libre d'équilibre d'un volume liquide axisymétrique en état de lévitation électromagnétique est déterminée par deux méthodes de calculs : une réalisant un minimum d'une fonctionnelle d'énergie ,l'autre un saut surfacique de contraintes tangentielles nul. Cette dernière étude est ensuite étendue au calcul de la surface libre d'un ménisque axisymétrique centré sur un anneau inducteur. Les termes électromagnétiques sont calculés soit ,pour une épaisseur de peau électromagnétique faible par rapport à la grandeur caractéristique du domaine levité ,en utilisant une méthode s'appuyant sur l'équation de l'induction exprimée en variables complexes , soit , pour une épaisseur de peau nulle ,par une méthode d'éléments aux limites.

Ces calculs étant tous réalisés sous une hypothèse de pénétration du champ magnétique très faible, le mouvement de brassage électromagnétique n'est pas pris en compte. Les formes obtenues présentent des variations satisfaisantes en fonction des paramètres gouvernant le phénomène. Enfin une analyse de stabilité en modes normaux de la zone lévitée dans le procédé métallurgique de coulée continue horizontale est présentée. Elle permet d'obtenir la longueur maximale du domaine lévité au dessus de laquelle la surface du domaine est obligatoirement instable. Elle démontre que cette longueur est la même que le domaine lévité soit une feuille ou un cylindre.

Dans le numéro spécial du 25ième anniversaire du très renommé "Journal of Fluid Mechanics", J.A.SHERCLIFF (69) plaidait pour une ouverture de ce journal aux articles traitant de problèmes technologiques. Il affirmait alors que la réconciliation de deux modes de pensée, celui du scientifique, attaché à décrire des phénomènes naturels et celui de l'ingénieur capable de créer des phénomènes artificiels ne pouvait qu'être profitable à l'une et à l'autre des parties ("cross fertilization") et, par conséquent utile à la communauté humaine toute entière. Bien que les définitions données des termes "science" et "technologie" méritent, et font sans doute l'objet de longs débats, auxquels mon propos n'a pas la prétention de participer, je nourris l'espoir que ma thèse soit une bonne illustration de cet enrichissement mutuel souhaité par Shercliff.

Les problèmes que je me suis attachée à résoudre sont d'ordre scientifique, il s'agit de l'étude des effets des champs magnétiques sur les surfaces libres des liquides électroconducteurs. A cette fin, expériences et calculs ont été mis en oeuvre, ce qui a permis de démontrer la faisabilité et de caractériser le contrôle de la surface par ce type de champ. La possibilité clairement établie, c'est à dire parfaitement reproductible et prévisible, de former sans contact un ruban de métal fondu de faible épaisseur et de grande largeur a trouvé un champ d'application dans un contexte industriel : contribuer à la mise en oeuvre du procédé métallurgique de la coulée directe de bandes minces. L'objet de mes investigations est alors, dans ce cas, devenu d'essence technologique : fabriquer un inducteur capable de permettre l'application de ce phénomène scientifiquement démontré. Or un chercheur en mécanique des fluides n'est certes pas la personne la plus qualifiée pour créer un inducteur. Cette remarque soulève le problème de la compétence, problème qui n'appartient pas qu'à moi : tout expérimentateur est, ou devient, un peu bricoleur, et il doit en outre posséder les connaissances d'informatique, d'électronique ou d'électrotechnique nécessaires à la maîtrise de son sujet.

Après cette courte digression, il me semble important de noter que toutes recherches rapportées dans cette thèse n'ont pas trouvé de champ d'application. L'étude, par exemple, de la déflexion de lame liquide va-t-elle rester purement académique ? Il est pourtant légitime de penser que guider un écoulement sans contact matériel peut contribuer à la résolution de problèmes technologiques. Les propriétés existent, sont-elles exploitables ? doit-on les exploiter ? Etant donnée la teneur de mon sujet, aucun problème éthique, et je m'en réjouis, n'est inscrit dans cette dernière question. Le choix opéré est d'ordre économique. Si le procédé est susceptible, ou supposé tel, de rapporter plus d'argent qu'un autre, il peut être choisi et contribuer à la production industrielle.

Ainsi l'économie, initiatrice de mes recherches, comme je l'ai montré dans l'introduction de cette thèse, en est aussi un des ressorts. Toutefois, l'industriel, sponsor parfois généreux mais jamais désintéressé, peut s'opposer à ce qu'une technologie, dont il attend un retour d'argent, soit divulguée. Théoriquement le partage des connaissances est

clair : le savoir scientifique appartient au scientifique qui peut donc le rendre public, le savoir faire technologique à l'industriel. Mais où, dans la réalité, se trouve la limite entre ces savoirs ? Communiquer est pourtant doublement vital pour le scientifique : c'est d'après cette transmission qu'il sera jugé et, de ce don de connaissance, il attend un retour qui lui permettra d'accroître son savoir. Or, force m'est de constater, avec amertume, que bien que n'ayant pas eu (encore) à subir directement le désagrément lié à la volonté de "valorisation", que constitue la confidentialité, j'en supporte les conséquences indirectes. En effet, c'est à cette nécessité de secret que j'attribue la faiblesse du nombre des publications ou communications traitant de mon sujet. Celles-ci présentent, d'ailleurs, beaucoup plus de calculs que d'expériences. En outre, dans ces dernières années, plusieurs personnes ayant sollicité de ma part l'envoi de tirés à part, en motivant leur demande par leur volonté de faire des expériences proches de certaines présentées dans cette thèse, n'ont jamais donné suite à mes souhaits d'échanges sur l'état de nos travaux respectifs, ni publié quoique ce soit à ce sujet.

Malgré ce brouillard que j'attribue à la concurrence industrielle, je pense sincèrement que l'équipe du laboratoire MADYLAM, à laquelle j'appartiens, possède une avance dont la longueur ne peut, bien entendu, pas être évaluée. Les futurs essais d'un inducteur que nous espérons très performant, qui auront lieu dans une usine sidérurgique du Groupe Usinor-Sacilor, accentuent cette avance. La construction prochaine d'une installation expérimentale fonctionnant avec de l'étain va nous permettre, non seulement de connaître les changements induits par la solidification sur la forme de l'impact mais aussi, le cas échéant, d'utiliser des champs magnétiques pour contrôler cet impact. A plus longue échéance, nos partenaires devront sans doute transposer une partie de ces études dans leur propre centre de recherches.

Ceci concerne non seulement les producteurs d'acier mais aussi d'aluminium. Un contrat européen est en cours de négociation afin que les études concernant le procédé de coulée directe soient communiquées entre les divers contractants soit, pour la France, Pechiney et l'IRSID.

Bien que les retombées technologiques de mon sujet, qui, par ailleurs, contribue fortement à l'avènement d'une nouvelle science : la "mécanique des métaux liquides", se présentent sous de bons auspices, l'absence de collaboration directe avec des équipes de physiciens s'intéressant aux interfaces est cependant frustrante. Il est évident que nous n'avons pas exploité toutes les possibilités qui s'offrent à nous. Par exemple, nous ouvrirons de nouveaux champs d'application à nos recherches lorsque nous aurons montré les effets des champs magnétiques sur les interfaces polarisées. De plus, même si ceci paraît aujourd'hui hasardeux, je pense que les champs magnétiques alternatifs, autorisant l'obtention de formes de surface non naturelles, peuvent être utilisées dans beaucoup d'autres domaines de la physique que dans celui de l'élaboration de matériau.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **S.ASAI**
 "Process development and stability analysis of horizontal electromagnetic casting"
 1986
 The Iron and Steel Institut of Japan
- [2] **R.ANEQUIN et J.BOUTIGNY**
 "Cours de sciences physiques - électricité I"
 1973
 Librairie Vuibert Paris
- [3] **R.BARRE**
 discours à l'assemblée nationale
 4 octobre 1978
- [4] **G.K.BATCHELOR**
 "An Introduction to Fluid Dynamics"
 1967
 Cambridge University Press
- [5] **G.K.BATCHELOR**
 "On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number"
 1956
 J.Fluid Mech. vol1 part2 pp177-190
- [6] **J.BERKOWITZ ,K.O.FRIEDRICHS ,H.GOERTZEL ,H.GRAD et J.KILLEEN**
 "Cusped geometries"
 1958
 Proceedings of the 2nd International Conference on Peaceful Uses of atomic Energy
 (Genève) pp171-176
- [7] **J.M.BIASSE et M.GARNIER**
 "Procédé et dispositif pour faciliter la soudure"
 7 mars 1980
 Brevet d'invention n° 80 05 252
- [8] **J.M.BIASSE**
 "La lévitation électromagnétique - Une proposition d'application à la soudure"
 13 novembre 1981
 Thèse de docteur-ingénieur USMG-INPG (Grenoble -France)
- [9] **J.P.BRANCHER ,J.ETAY et O.SERO-GUILLAUME**
 "Formage d'une lame métallique liquide - Calculs et expériences"
 1983
 Journal de mécanique théorique et appliquée vol2 pp977-989
- [10] **J.P.BRANCHER ,R.DEFRAMOND et O.SERO-GUILLAUME**
 "Shaping of liquid metal cylinders"
 1984
 4th Beer-Sheva Seminar on M.H.D.

- [1 1] **S.CHANDRASEKHAR**
 "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability"
 1961
 Oxford University Press

- [1 2] **C.E.CHANG et W.R.WILCOX**
 "Inhomogeneities due to thermocapillary flow in floating zone melting"
 1975
 Journal of Crystal Growth vol28 pp8-12

- [1 3] **R.L.COLLINS**
 "Growth parameters for large diameter float zone silicon crystals"
 1977
 Journal of Crystal Growth vol42 pp490-492

- [1 4] **R.DEFRAMOND**
 "Analyse des possibilités d'applications du formage électromagnétique à l'élaboration des matériaux amorphes"
 juin 1983
 Mémoire de D.E.A ENSIEG-INPG (Grenoble - France)

- [1 5] **R.DEFRAMOND ,A.YAVARY ,C.SENILLOU ,J.C.JOUD et M.GARNIER**
 "Procédé et dispositif pour l'élaboration de rubans notamment amorphes ou semi métalliques de faibles épaisseurs."
 1984
 Brevet Français n°84 00747

- [1 6] **R.DEFRAMOND**
 "Quelques aspects du formage électromagnétique des surfaces libres. Applications et hydrodynamique"
 12 novembre 1985
 Thèse de doctorat INPG-USMG (Grenoble - France)

- [1 7] **E.DURAND**
 "Magnétostatique"
 1968
 Masson et Cie pp151-152

- [1 8] **R.ERNST**
 "Analyse du fonctionnement d'un générateur à triode destiné au chauffage par induction"
 septembre 1981
 R.G.E. n°9 pp667-673

- [1 9] **R.ERNST ,M.GARNIER ,M.GIROUTRU ,R.MOREAU ,M.PEYTAVIN et M.GUEUSSIER**
 "Procédé de fabrication de produits longs creux par coulée continue à l'aide d'un champ magnétique et dispositif de mise en oeuvre du procédé"
 13 janvier 1982
 Brevet d'invention 82 00 763

- [2 0] **R.ERNST**
 "La fusion des verres par induction"
 1985
 La Technique Moderne vol77 n°7/8 pp43-46

[2 1] J.ETAY et M.GARNIER

"Procédé et dispositif ,de type électromagnétique ,pour le formage des métaux"

22 décembre 1981

Brevet d'invention n° 81 24 009

[2 2] J.ETAY et M.GARNIER

"Procédé et dispositif électromagnétique d'élaboration de rubans et de tôles métalliques de faible épaisseur"

21 avril 1982

Brevet d'invention n° 82 06 876

[2 3] J.ETAY

"Le formage électromagnétique des métaux liquides. Aspects expérimentaux et théoriques"

24 juin 1982

Thèse docteur-ingénieur INPG-USMG (Grenoble - France)

[2 4] J.ETAY et M.GARNIER

"Le contrôle électromagnétique des surfaces métalliques liquides et ses applications"

1982

Journal de Mécanique Théorique et Appliquée vol1 n°6 pp911-925

[2 5] Y.FAUTRELLE

"Analytical and numerical aspects of the electromagnetic stirring induced by an alternating magnetic field"

1981

J.Fluid Mech vol102 pp405-430

[26] S.FAUVE , C.LAROCHE et A.LIBCHABER

"Effect of an horizontal magnetic field on convective instabilities in mercury"

1981

J.Phys.Lett. vol42 n°21 pp455-457

[27] B.D.FRIED ,J.W.VANDAM et Y.C.LEE

"Free boundaries for plasmas in surface magnetic field configurations"

décembre1976

The Physics of Fluids vol12 pp1909-1923

[2 8] A.GAGNOUD

"Modélisation des installations de fusion en creusets froids ,pour l'élaboration en continu ou la lévitation"

16 avril 1986

Thèse INPG (Grenoble - France)

[29] F.GARNIER

"Contribution à l'étude de la coulée directe"

juin 1987

Mémoire de D.E.A ENSHMG-INPG (Grenoble - France)

[30] M.GARNIER

"Une analyse des possibilités de contrôle électromagnétique des surfaces de métaux liquides"

15 mars 1982

Thèse d'état USMG-INPG (Grenoble-France)

- [31] **M.GARNIER et R.MOREAU**
 "Dispositif électromagnétique de confinement des métaux liquides"
 4 juillet 1975
 Brevet d'invention n°75 21 075
- [32] **M.GARNIER et R.MOREAU**
 "Procédé et dispositifs pour diriger ,en l'absence de parois ,des veines métalliques liquides ,notamment pour les centrer ,les guider et contrôler leur forme circulaire"
 12 juillet 1977
 Brevet d'invention n°77 21 513
- [33] **M.GARNIER**
 "Les paramètres adimensionnels de la MHD avec champs magnétiques alternatifs"
 19 au 22 avril 1983
 Stage de perfectionnement pour techniciens ,ingénieurs et cadres
 "Magnétodynamique des métaux liquides - Applications à la métallurgie"
 ENSHMG-INPG (Grenoble-France)
- [34] **M.GARNIER et R.MOREAU**
 "Effect of finite conductivity on the inviscid stability of an interface"
 1983
 J.Fluid Mech. vol127 pp365-377
- [35] **M.GARNIER**
 "Procédés électromagnétiques de séparation liquide-solide ou liquide-gaz"
 1987
 Congrès sur les procédés électriques de séparation
 Biarritz-France
- [36] **J.GEER et J.B.KELLER**
 "Slender streams"
 1979
 J.Fluid Mech. vol93 part1 pp97-115
- [37] **R.V.GILES**
 "Fluid mechanics and hydraulics"
 1962
 Mc Graw-Hill
- [38] **K.H.M.GOH et E.O.TUCK**
 "Thick waterfalls from horizontal slots"
 1985
 Journal of Engineering Mathematics vol19 pp341-349
- [39] **H.GRAD ,A.KADISH et D.C.STEVENS**
 "A free boundary tokamak equilibrium"
 1974
 Communications on pure and applied mathematics volXXVII pp39-57
- [40] **G.M.HARRIOTT et R.A.BROWN**
 "Flow in a differentially rotated cylindrical drop at low Reynolds number"
 1983
 J.Fluid Mech. vol126 pp269-285

- [4 1] **P.HOYER**
 "Über die Kompensation des Schwerkraft durch die in volumen wirksame Lorentzkraft ins besondere beim Stahstraggrieben."
 2 novembre 1977
 Thèse Université Technique d'Hanovre (R.F.A)
- [4 2] **I.R.S.I.D.**
 plaquette de présentation
 1984
 Document édité par le Comité de Direction Technique de l'IRSID p8
- [4 3] **R.W.JECH ,T.J.MOORE ,T.K.GLASGOW et N.W.ORTH**
 "Rapid solidification via melt spinning - Equipment and techniques"
 avril 1984
 Journal of Metals pp41-45
- [4 4] **P.JULLIARD**
 "Etude expérimentale de l'impact d'un jet sur la tranche d'une roue en mouvement"
 juin 1987
 Mémoire de D.E.A ENSHMG-INPG (Grenoble - France)
- [4 5] **P.KATCHER**
 "Horizontal casting becomes routine system"
 1987
 IAMI n°3 pp21-22
- [4 6] **H.H.LIEBERMANN**
 "Planar and cylindrical jet streaming of water and molten Fe₄₀-Ni₄₀-B₂₀ alloy"
 novembre 1979
 J. Appl Phys 50 pp6773-6778
- [4 7] **E.J.MAC HALE et J.R.MELCHER**
 "Instability of a planar liquid layer in an alternating magnetic field"
 1982
 J.Fluid Mech. vol114 pp27-40
- [4 8] **A.MOREAU**
 "L'évolution récente des consommations spécifiques d'acier; mesure des différents facteurs"
 janvier 1985
 Revue de Métallurgie - Cahier d'informations techniques
- [4 9] **A.J.MESTEL**
 "Magnetic levitation of liquid metals"
 1982
 J.Fluid Mech. vol117 pp27-43
- [5 0] **A.J.MESTEL**
 "Magnetic levitation of liquid metals"
 1982
 Thèse DAMTP Cambridge University - Angleterre
- [5 1] **H.K.MOFFATT**
 "Magnetic field generation in electrically conducting fluids"
 1978
 Cambridge University Press

[5 2] H.K.MOFFATT

"High frequency excitation of liquid metal systems"
 1982
 Actes du symposium IUTAM pp180-189
 "Metallurgical applications of magnetohydrodynamics"
 The Metal Society London

[5 3] D.J.MOORE et J.C.R.HUNT

"Flow , turbulence and steadiness in coreless induction furnaces"
 1982
 Actes du symposium IUTAM pp93-107
 "Metallurgical applications of magnetohydrodynamics"
 The Metal Society London

[5 4] G.S.MURTY

"Instability of conducting fluid cylinder due to axial current"
 1960
 Arkiv för Fysik Band 18 n°14 pp241-249

[5 5] G.S.MURTY

"Instability of conducting fluid cylinder due to axial current a
 longitudinal magnetic field and a coaxial cylinder"
 1960
 Arkiv för Fysik Band 19 n°35 pp483-491

[5 6] NIPPON STEEL

plaquette de présentation
 1983
 p44

[5 7] E.C.OKRESS,D.M.WROUGHTON,G.COMENETZ,P.H.BRACE et J.C.R.KELLY

"Electromagnetic levitation of solid and molten metals"
 may 1952
 J.of Applied Physics vol23 number3 pp545-552

[5 8] S.OSHIMA ,R.YAMANE ,Y.MOCHIMARU et K.SUDO

"Investigation of a film flow of a conducting fluid in a tranverse
 magnetic field"
 juillet 1986
 Bulletin of JSME vol29 n°253 pp2078-2085

[5 9] S.OSHIMA ,R.YAMANE ,Y.MOCHIMARU et T.MATSUOKA

"The shape of a liquid metal jet under a non-uniform magnetic field"
 1987
 JSME International Journal vol30 n°261 pp437-448

[6 0] T.PEDLEY

"The stability of rotating flows with a cylindrical free surface"
 1967
 J.Fluid Mech. vol30 pp127-147

[6 1] J.P.PERRIN et J.P.PASCAL

"Les transports urbains automatiques de demain"
 juillet-août 1987
 La Recherche (supplément) n°190 pp18-29

- [6 2] **L.RAYLEIGH**
 "On the capillary phenomena of jet"
 mai 1879
 Proc.R.Soc.London vol29 n°196 pp71-92
- [6 3] **S.R.SAGARDIA**
 "Electromagnetic levitation melting of a large conductiv loads"
 1974
 PhD-Thesis Toronto-University (Department of electrical engineering) (Canada)
- [6 4] **C.SAUTY**
 "Etude hudrodynamique de l'impact d'une lame liquide sur un rouleau en rotation"
 septembre 1987
 Magistère de Physique (E.N.S. Paris)
- [6 5] **M.J.SCHAFER**
 "Hydromagnetic surfaces waves with alternating magnetic fields"
 1968
 J.Fluid Mech. vol33 part2 pp337-351
- [6 6] **J.A.SHERCLIFF**
 "A textbook of magnetohydrodynamics"
 1965
 Pergamon Press
- [6 7] **J.A.SHERCLIFF**
 "Two-dimensional plasma equilibria"
 1979
 J.Plasma Physics vol27 part2 pp347-360
- [6 8] **J.A.SHERCLIFF**
 "Magnetic shaping of molten metal columns"
 1981
 Proc.R.Soc.Lond. volA375 pp455-473
- [6 9] **J.A.SHERCLIFF**
 "Reflection of a new editor"
 1981
 J. Fluid Mech. vol106 pp349-356
- [7 0] **J.A.SHERCLIFF**
 "Liquid metal columns confined by external parallel conductors and surface tension - Part I:Two dimensional theory."
 23-27 mars 1981
 the third international seminar on the MHD flows and turbulence
 (Beer-Sheva Israel)
 Copyright 1983 AIAA
- [7 1] **N.M.SCHNURR ,J.W.WILLIAMSON et J.W.TATOM**
 "An analytical investigation of the impingement of jets on curved deflectors"
 novembre 1972
 AIAA Journal vol10 n°11 pp1430-1435

[7 2] A.D.SNEYD et H.K.MOFFATT

"Fluid dynamical aspects of the levitation melting process"

1982

J.Fluid Mech. vol117 pp45-70

[7 3] A.D.SNEYD

"Fluid flow induced by a rapidly alternating or rotating magnetic fields"

1979

J.Fluid Mech. vol92 part1 pp35-51

[7 4] J.SOMMERIA et R.MOREAU

"Why ,how and when MHD turbulence becomes two-dimensional"

1982

J.Fluid Mech. vol118 pp507-518

[7 5] E.TABERLET

"Le brassage turbulent dans les fours à induction"

12 juillet 1984

Thèse INPG-USMG (Grenoble-France)

THESE de DOCTEUR ès-SCIENCES

Titre de l'ouvrage :

**LE PROBLEME DE FRONTIERES LIBRES
EN MAGNETODYNAMIQUE DES LIQUIDES
AVEC CHAMPS MAGNETIQUES ALTERNATIFS :
ASPECTS FONDAMENTAUX ET APPLICATIONS**

Nom de l'auteur : Jacqueline ETAY

Établissement : Institut National Polytechnique de Grenoble

RÉSUMÉ

Les possibilités de contrôle de forme, de position et de stabilité de la surface libre d'un milieu électroconducteur par utilisation de champs magnétiques alternatifs sont examinées. Une attention particulière est apportée aux applications concernant la mise en œuvre du procédé métallurgique de la coulée directe de produits minces obtention par formage électromagnétique de rubans liquides de grande largeur, guidage électromagnétique de lames, détermination des conditions optimum de stabilité lors de l'impact d'une lame liquide sur la tranche d'une roue en rotation. La forme d'équilibre de la surface libre d'un domaine liquide en lévitation, celle d'un ménisque centré sur un anneau inducteur ainsi que celle d'une colonne liquide placée dans un champ magnétique uniforme sont déterminées. Ces calculs font appel à des techniques d'éléments aux limites et de principes variationnels. Dans chaque cas, calculs et expériences sont confrontés. Les critères de stabilité de la partie liquide levitée dans le procédé de coulée continue horizontale sont établis par une analyse en modes normaux.

MOTS-CLÉS

Métaux liquides ; Champ magnétique alternatif ; Frontières libres ; Contrôle de forme ; Lévitation ; Coulée continue horizontale ; Coulée directe ; Stabilité d'interfaces ; Jets ; Impact ; Principe variationnel ; Méthode des singularités ; Analyse en modes normaux.